# 擬微分作用素

## —偏微分方程式解法への応用—

大阪府立大学教授

理学博士

新　開　謙　三　著

東京　裳　華　房　発行

# Pseudodifferential Operators

by

Kenzo Shinkai

SHOKABO

TOKYO

# まえがき

本書の主題である擬微分作用素の理論は，今から 30 年ほど前に始められた比較的新しいものである．それは次のように要約できる．フーリエ変換によって微分することが多項式の掛算になる．これを逆転して考える．

（多項式を一般化した）関数をフーリエ変換したものに掛け，それを逆フーリエ変換し，そののち（微分多項式の係数にあたる）関数を掛ける作用素を考えると微分作用素を拡張したものになる．元々の独立変数を $x \in \mathbb{R}^n_x$ で表し，フーリエ変換をした後の独立変数を $\xi \in \mathbb{R}^n_\xi$ で表す．そして，考えている作用素に対し $2n$ 変数の関数 $p(x,\xi)$ を対応させる．作用素の性質を調べることを，$p(x,\xi)$ を調べることに帰着させる．そのときに，ライプニッツの公式，テーラーの定理，部分積分などの微積分の初歩的な方法を主として用いる．

新しい理論ではあるが，古くからのよく知られた解析学の方法と超関数の理論を結び付けたものであり，微分方程式の解法としては明快かつ有力な方法である．歴史が浅いので，広く知られているとはいえないが，偏微分方程式の理論的研究のためのものに終わらず，将来は応用数学の広い分野で用いられるようになるものと確信している．

西暦 1700 年前後に天文学その他の分野からの要求によって始まった微分積分学は自然界を記述する微分方程式を解くことが一つの大きな目的であった．現在では微分方程式の解法を要求する分野は，生物学や経済学にまで広がっている．そして，そこに現れる微分方程式は古典的な簡単なものでなく，今までの理論では扱えないものになってきている．そして解を求めることが困難であれば解の性質だけでも調べることが要求されている．

数学の多くの分野が微分方程式の研究に関連して発展してきた．そして，種々の方法が微分方程式の研究に用いられてきた．フーリエ（Jean–Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830）の導入したフーリエ級数を用いる方法はきわめて有力な方法であり，現在でも工学部の学生には必修のものになっている．これが有力であるのは，一つには普通の意味で微分できない関数が扱えることにある．

しかし，フーリエ級数を用いる方法はフーリエ級数と三角関数の級数との違い，扱える関数の範囲の問題など困難な問題が常につきまとっていた．それをすっきりさせたのがシュワルツ（Laurent Schwartz, 1915– ）の超関数の理論である．シュワルツはその著書 "物理数学の方法" [1] で物理学，工学への応用を述べている．

シュワルツの超関数理論に対しフィールズ賞が贈られたのは 1950 年であったがその先駆けとなった工学者ヘビサイド（Oliver Heaviside, 1850–1925）の理論は 1893 年，また物理学者ディラック（Paul Adrian Maurice Dirac, 1902–1984）の理論は 1926 年にだされている．これらはすべて，偏微分方程式を解く努力の結果として生まれてきたものである．シュワルツの "超函関数の理論" [2] が出版された後，偏微分方程式の一般理論が多くの数学者の努力によって著しく発展した．ヘルマンダ（Lars Valter Hörmander, 1931– ）によって 1963 年にだされた本 [1]，溝畑茂（1924– ）によって 1965 年にだされた本 [1] の初めに超関数についての章が設けられていることからもシュワルツの理論の重要性がわかる．

これらの本が出版された後も偏微分方程式の理論は発展し続けたが，古典的方法，関数解析的方法を用いることが必要な部分が多かった．1958 年にカルデロン（Albert–Pedro Calderón, 1920– ）[1] が特異積分作用素の理論を用いて変数係数の偏微分方程式の初期値問題の局所解の一意性を証明して以来，偏微分作用素を特異積分作用素で表現する研究が進められたが，1965 年になっ

て，コーン（Joseph John Kohn, 1932– ），ニーレンバーグ（Louis Nirenberg, 1925– ），ヘルマンダ等によって擬微分作用素の理論へと発展させられた．擬微分作用素とはなにか，いかに有力かといったことは本文に譲ることにするが，成書としては世界に先駆けて 1976 年に熊ノ郷準（1935–1982）によって“擬微分作用素”［1］が出版され，その後トレーヴ（François Treves, 1930– ）［1］(1980), テーラー（Michael Eugene Taylor, 1946– ）［1］(1981), 熊ノ郷［3］(1982) などが出版された．

熊ノ郷が［1］の序文で，擬微分作用素の理論はフーリエ変換を通じてライプニッツの公式とテーラーの公式とを結び付けた理論であると述べているように，擬微分作用素の理論はいくつかの難しい定理を別にするときわめて明快な理論である．上記のような優れた本が存在するのに，さらにこの小著を出版するのは，この明快，有力な理論を数学専攻以外の人々にも知ってもらい，偏微分方程式を解くときに利用してもらいたいからである．上記の本は数学を研究する者のために書かれたものであるが，本書は読者として理学部，工学部の 3，4 年生から大学院学生を念頭において書いた．

第 1 章では理論の基礎になる空間 $\mathcal{S}$ とその元のフーリエ変換について述べ，擬微分作用素の定義をし，擬微分作用素の基本公式を述べる．

第 2 章では超関数を定義し擬微分作用素の作用する範囲を超関数にまで広げる．これで擬微分作用素の理論が強力なものになるのである．その一端を示すものとして古典的な偏微分方程式の基本解について述べる．

第 3 章では擬微分作用素の有力さが端的に示されるものの一つとして放物型偏微分方程式の初期値問題について述べる．

理論的な部分はルベーグ積分と位相ベクトル空間の理論なしではすまされないが偏微分方程式の解法としての応用にのみ関心のある人はこれらをとばして

読み進められてよいと考える．例えば第 1.5, 2.5 節とその引用されている部分，いくつかの定理の証明などは，理論的には重要であるが，まずは飛ばして，第 3 章にある解の表現のところまで読み進められることを希望する．

問題とその詳しい解答も本書の特徴である．問題の前には例題があり，それを参考にすればすぐに解けるようにしたつもりである．ぜひ解答を試みられるように希望する．

**謝辞**

出版を勧めてくださった大阪大学名誉教授 村上信吾 先生

擬微分作用素の理論を手ほどきしてくれた著者の同級生である 故熊ノ郷準君

出版に際しいろいろお世話になった裳華房の細木周治様

皆さんどうも有難うございました．

1994 年 4 月

新開謙三

# 擬微分作用素目次

# 第1章 擬微分作用素の定義

この章では，まず 第 1.1 節で関数空間 $\mathcal{S}$ を定義する．$\mathcal{S}$ はシュワルツ空間あるいは急減少関数の空間と呼ばれ性質がよくて扱いやすい空間であり，本書では全体を通じて基本的な空間となる．そして $\mathcal{S}$ の元に対して作用するものとして擬微分作用素の定義を与える．これでは，応用範囲が狭くなる．しかし，次の章で普通の関数を広く拡張したものともいえる超関数にまで作用する対象を拡げるので，作用する対象が狭くて困ることはない．

擬微分作用素が導入された一つの目的は，偏微分作用素の逆作用素をつくることにある．しかし，偏微分作用素は写像としては一般には 多対一 の写像であるから，なんらかの制限をつけなければ逆作用素は定義できない．偏微分作用素の理論の多くは，どのような条件の下で 1 対 1 の写像になるか，どの関数空間からどの関数空間への写像であるかを調べることであるといえる．

擬微分作用素を定義するにはフーリエ変換が必要である．第 1.2 節では $\mathcal{S}$ の元のフーリエ変換について述べる．フーリエ変換は，微分するということを多項式を掛けるということに変換する．ラプラス変換も同じ性質をもち，それを用いて定数係数の微分方程式を解くことができるということはよく知られたことである．変数係数の場合は単にフーリエ変換またはラプラス変換をするだけでは，どうにもならない．そこで擬微分作用素が登場するわけである．

第 1.3 節で，フーリエ変換を用いて擬微分作用素を定義する．そして積公式

などの基本的な公式を与える．

第 1.4 節では，H 条件と呼ばれる条件を満たす偏微分作用素に対して，パラメトリックスと呼ばれる逆作用素に極めて近い作用素を，擬微分作用素を用いて構成する．ここで重要な役割をするのが擬微分作用素のシンボルの漸近展開公式である．

第 1.5 節では，擬微分作用素のシンボルの位相について述べる．擬微分作用素が何かパラメータに依存していて，そのパラメータがある値に収束するときに，擬微分作用素がどのような作用素に収束するかということを扱うためにぜひ必要なことである．そのためにフレッシェ空間と呼ばれる空間について述べなければならない．

## 1.1. 急減少関数空間

この節では，本書を通じて基礎となる関数である急減少無限回可微分関数の空間 $\mathcal{S}$ について述べる．その前に記号を定めライプニッツの公式とテーラーの定理について復習する．

$\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表すものとする． $\mathbb{Z}_+$ で自然数全体に零をあわせた集合を表す．$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \cdots\}$ である．

$n$ 次元ユークリッド空間を $\mathbb{R}^n$ で表す．

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n);\quad x_j \in \mathbb{R}\}$$

である．

**多重指標** $\alpha$ とは

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n), \quad \alpha_j \in \mathbb{Z}_+$$

である．これを $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ と表す．そして

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

と表す．**微分記号**は $\partial_\xi^\alpha$ と $D_x^\beta$ の 2 種類あり

$$\partial_\xi^\alpha = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1} \partial_{\xi_2}^{\alpha_2} \cdots \partial_{\xi_n}^{\alpha_n}, \qquad \text{ここに} \quad \partial_{\xi_j} = \frac{\partial}{\partial \xi_j},$$

$$D_x^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} D_{x_2}^{\beta_2} \cdots D_{x_n}^{\beta_n}, \quad \text{ここに} \quad D_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

である．$x$ についての微分を上のように表すのはフーリエ変換との関係で都合がよくなるからで，その理由は後でわかる．第 1.2 節を見よ．

ここで，多重指標を用いてライプニッツ (Leibniz) の公式とテーラー (Taylor) の定理の復習をする．$\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ であるとき**多重指標の和**を

$$\alpha + \beta = (\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n)$$

と定める．すべての $j$ に対して $\alpha_j \geq \beta_j$ であるとき，“ $\alpha \geq \beta$ **である**”という．そしてこのときにかぎり**多重指標の差**を

$$\alpha-\beta=(\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_n-\beta_n)$$

と定める．

どれかの $j$ について $\alpha_j<\beta_j$ が成り立つとき "$\alpha\geq\beta$ **でない**" という．

また

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n,$$

$$\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$$

と定める．$\alpha\geq\beta$ であるとき

$$\binom{\alpha}{\beta}=\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n},\quad \text{ただし}\binom{\alpha_j}{\beta_j}=\frac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j-\beta_j)!}.$$

$\alpha\geq\beta$ でないとき

$$\binom{\alpha}{\beta}=0$$

と定義する．これを用いると，$x,y\in\mathbb{R}^n$, $m\in\mathbb{Z}_+$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ に対し

$$(1.1.1)\qquad (x_1+\cdots+x_n)^m=\sum_{|\beta|=m}\frac{m!}{\beta!}x^\beta,$$

$$(1.1.2)\qquad (x+y)^\alpha=\sum_\beta\binom{\alpha}{\beta}x^\beta y^{\alpha-\beta}$$

と表せる．ただし $x=(x_1,\cdots,x_n)$,　$x+y=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)$ である．

(1.1.1) はいわゆる**多項定理**である．(1.1.2) の和 $\sum_\beta$ はすべての多重指標 $\beta$ についての和である．しかし，$\alpha\geq\beta$ でなければ $\binom{\alpha}{\beta}=0$ であるから $\binom{\alpha}{\beta}\neq 0$ となる $\beta$ は有限個であり，和は有限和である．

(1.1.2) の証明をする．$n=1$ の場合は普通の二項定理である．一般の場合は空間の次元 $n$ についての帰納法を用いて証明する．$\alpha'=(\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},0)$ とすると $\alpha=\alpha'+(0,\cdots,0,\alpha_n)$ であるから

$$\begin{aligned}(x+y)^\alpha &= (x_1+y_1)^{\alpha_1}\cdots(x_{n-1}+y_{n-1})^{\alpha_{n-1}}(x_n+y_n)^{\alpha_n}\\ &= (x+y)^{\alpha'}(x_n+y_n)^{\alpha_n}\\ &= \sum_{\beta'}\binom{\alpha'}{\beta'}x^{\beta'}y^{\alpha'-\beta'}\sum_{k=0}^{\alpha_n}\binom{\alpha_n}{k}x_n^k y_n^{\alpha_n-k}\\ &= \sum_{\beta}\binom{\alpha}{\beta}x^\beta y^{\alpha-\beta}\end{aligned}$$

となる．

上の (1.1.2) の証明と全く同様にして**ライプニッツの公式**

$$\partial_x^\alpha(uv) = \sum_\beta\binom{\alpha}{\beta}\partial_x^\beta u\partial_x^{\alpha-\beta}v \tag{1.1.3}$$

を得る． $a$ を定数とし

$$q(\xi) = \sum_{|\beta|\le m} a_\beta\xi^\beta$$

とおく．$Q = q(D_x)$ を $uv$ に作用したときの公式もライプニッツの公式と呼ばれる．簡単のため

$$q^{(\alpha)}(\xi) = \partial_\xi^\alpha q(\xi)$$

とかくことにする．この記号は後でも使われる．

$$\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\xi^\beta = \binom{\beta}{\alpha}\xi^{\beta-\alpha}$$

であるから

$$\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(\xi) = \sum_{|\beta|\le m}\binom{\beta}{\alpha}a_\beta\xi^{\beta-\alpha}$$

と表される．したがって公式 (1.1.3) とこれを用いると

$$\begin{aligned}Q(uv) &= \sum_{|\beta|\le m}a_\beta D_x^\beta(uv) = \sum_{|\beta|\le m}a_\beta\sum_\alpha\binom{\beta}{\alpha}(D_x^\alpha u)(D_x^{\beta-\alpha}v)\\ &= \sum_\alpha(D_x^\alpha u)\sum_{|\beta|\le m}\binom{\beta}{\alpha}a_\beta D_x^{\beta-\alpha} = \sum_\alpha(D_x^\alpha u)\frac{1}{\alpha!}q^{(\alpha)}(x,D_x)v\end{aligned}$$

となり，公式

$$Q(uv) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}(D_x^{\alpha}u)(q^{(\alpha)}(D_x)v)$$

を得る．

この公式から次に述べる微分多項式の積の公式が得られる．$a_{\alpha}(x)$ を何回でも微分できる関数として

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_{\alpha}(x)D_x^{\alpha}$$

と表される作用素を**微分多項式**という．

**定理 1.1.1.**　(微分多項式の積公式)

$$P_1 = p_1(x, D_x) = \sum_{|\beta|\le m} a_{\beta}(x)D_x^{\beta},$$

$$P_2 = p_2(x, D_x) = \sum_{|\gamma|\le m'} b_{\gamma}(x)D_x^{\gamma},$$

$$P = P_1P_2 = p(x, D_x)$$

として

$$p_1^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_{\xi}^{\alpha}p_1(x,\xi), \quad p_{2(\alpha)}(x,\xi) = D_x^{\alpha}p_2(x,\xi)$$

とする．**微分多項式の積公式**

$$p(x,\xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!}p_1^{(\alpha)}(x,\xi)p_{2(\alpha)}(x,\xi) \tag{1.1.4}$$

が成り立つ．

この和 $\sum_{\alpha}$ はすべての $\alpha$ についての和である．しかし，ここでは $p_1$ は $\xi$ についての多項式であるから $p_1(\alpha)(x,\xi) \neq 0$ である $\alpha$ は有限個であり，この和は有限和である．この公式と同じ形の公式が第2章で導入される．

**問 1.**　微分多項式の積公式 (1.1.4) を証明せよ．ヒント．$p_1 = \xi^{\beta}$，$p_2 = b(x)\xi^{\gamma}$ の場合を示せば十分である．

次に，テーラーの公式を導く．$x, y, h \in \mathbb{R}^n$ とする．$f(x)$ は何回でも微分できる関数とする．

$$F(t) = f(x+th), \quad t \in \mathbb{R}$$

とおく．1 変数のテーラーの公式から

$$F(1) = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) + \frac{1}{(N-1)!} \int_0^1 (1-t)^{N-1} F^{(N)}(t)dt.$$

ここで $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ を $\partial_j$ とかくことにすると，(1.1.1) によって

$$\begin{aligned} F^{(m)}(t) &= (h_1\partial_1 + \cdots + h_n\partial_n)^m f(x+th) \\ &= \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\beta!} h^\beta \partial_x^\beta f(x+th) \end{aligned}$$

となる．したがって次の**テーラーの公式**を得る．

$$\begin{aligned} f(x+h) = &\sum_{|\beta| \le N-1} \frac{1}{\beta!} h^\beta \partial_x^\beta f(x) \\ &+ \sum_{|\beta|=N} \frac{N}{\beta!} h^\beta \int_0^1 (1-t)^{N-1} \partial_x^\beta f(x+th)dt. \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

**問 2.** テーラーの公式 (1.1.5) を証明せよ．

以下，次の記号をよく用いる．

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}$$

**問 3.** 任意の $x, y$ に対して

$$\frac{\langle x+y \rangle}{\langle x \rangle} \le A\langle y \rangle, \qquad \frac{\langle x \rangle}{\langle x+y \rangle} \le A\langle y \rangle$$

が同時に成り立つ定数 $A$ が存在することを示せ．

ここで急減少関数空間の定義をする．

**定義 1.1.2.**　(急減少関数，緩増加関数，有界関数)

**1°**　$\mathcal{S}$ は次の性質 (1.1.6) を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の無限回微分可能な関数 $f(x)$ の線形空間である.

(1.1.6)　すべての $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} |x^\alpha D_x^\beta f(x)| = 0$

$\mathcal{S}$ の元を**急減少関数**と呼ぶ.

**2°**　次の条件を満たす無限回可微分関数 $f(x)$ を**緩増加関数**と呼ぶ.

$$\text{任意の } \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ に対し}\quad |\partial_x^\alpha f(x)| \le C_\alpha \langle x \rangle^{m_\alpha}$$

となる $C_\alpha$ と $m_\alpha$ が存在する. $f$ の全体を $\mathcal{M}$ で表す.

**3°**　**無限回有界可微分関数**の空間 $\mathcal{B}$ は次の性質を満たす $\mathbb{R}^n$ 上の無限回微分可能な関数 $f(x)$ の線形空間である.

(1.1.7)　すべての $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して定数 $C_\beta$ が存在して $\left|D_x^\beta f(x)\right| \le C_\beta$

この関数空間 $\mathcal{S}$ はシュワルツ空間とも呼ばれる. "空間" と呼ばれるのは, $\mathcal{S}$ が線形位相空間になっているからである. "**線形空間** $V$ " とは

$$f, g \in V,\ a, b \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad af + bg \in V$$

が成り立っていることである. $\mathbb{C}$ は複素数全体を表す.

**定理 1.1.3.**　(急減少関数の性質)

急減少関数について次のことが成り立つ.

**1°**　$\mathcal{S}$ は線形空間である.

**2°**　急減少関数と緩増加関数の積は急減少関数である.

$\mathcal{S}$ は線形空間というだけではなく, 位相が定義されている. "位相" については 第 1.5 節を見よ. また詳しくはシュワルツ [2] の 225 頁を見よ. 何回微分しても $x$ のどんな べき よりも速く減少する関数である. この人工的な関数空間をとり上げる理由は, 一つにはフーリエ変換をするときに扱いやすい関数空間になっていることにある. そのことについては第 1.2 節を見よ.

これがあまりにも特別な関数であって応用上不十分ではないかという疑問をもつかも知れないが，それは心配無用である．第 2 章で擬微分作用素を $\mathcal{S}$ の双対空間 $\mathcal{S}'$ まで拡張するからである．超関数の空間 $\mathcal{S}'$ は応用上十分といえる一般的な関数を含んでいる．“双対空間” については 第 1.5 節で説明する．

$\mathcal{D}$ を無限回可微分で有限な範囲を除いて零になる関数全体の空間とする．$\mathcal{S}$ は $\mathcal{D}$ を含む．$\mathcal{D}$ の元を**テスト関数**と呼ぶことがある．無限回微分可能な関数全体を $\mathcal{E}$ で表す．

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$$

である．無限回有界可微分関数の空間 $\mathcal{B}$, 緩増加関数の空間 $\mathcal{M}$ もあわせて

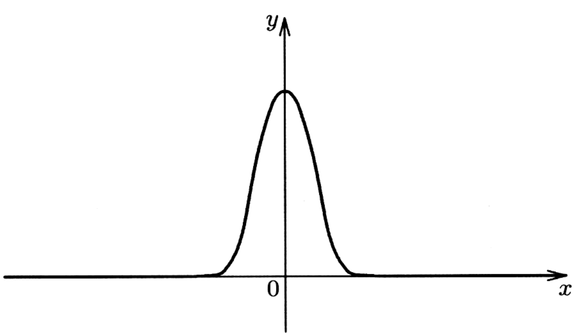
$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{E}$$

となっている．$\mathcal{D}$ を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,　$\mathcal{E}$ を $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ と表すことがある．

次の関数は $\mathcal{D}$ の例である．

**例 1.**　**(テスト関数の例)**　$x \in \mathbb{R}^1$ とする．$e^a = \exp[a]$ と表す．

$$g(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ \exp\left[1 - \dfrac{1}{1-x^2}\right], & |x| < 1 \end{cases} \tag{1.1.8}$$




関数 (1.1.8) のグラフ

**問 4.**　上の関数 (1.1.8) が $\mathcal{D}$ の元であって上の図のようになっていることを示せ．

**問 5.**　$f \in \mathcal{S}$, $f(x) \geq 0$ であるとする．$f(x_0) = C$,　$f(x) \leq C$ となる $x_0$ と $C$ すなわち $f(x)$ の最大値が存在することを示せ．また，$\mathcal{S}$ の関数を微分してもまた $\mathcal{S}$ に入るが逆は成立しないことを示せ．

**問 6.**　$x \in \mathbb{R}^1_x$ とする．$\exp[-x^2]$ は $\mathcal{S}$ の元であることを示せ．そして

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp[-x^2]dx = \sqrt{\pi}$$

を示せ．

**例 2.**　$f \in \mathcal{S}$ を $f(0) = 1$ を満たすものとする．

(1.1.9)　$\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon x) = 1$

(1.1.10)　任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ に対し ${}^{\exists} C_\alpha$; $|\partial^\alpha_x(f(\varepsilon x))| \leq C_\alpha \varepsilon^{|\alpha|}$

(1.1.11)　任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ に対し $|\alpha| \neq 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \partial^\alpha_x(f(\varepsilon x)) = 0$

が成り立つ．

**証明.**　急減少関数の定義の式 (1.1.6) により

$$|x| > M \;\Rightarrow\; |f(x)| < 1 \text{ となる } M \text{が存在する}$$

といえる．また，$\{x;\, |x| \leq M\}$ は有界閉集合であって，$|f(x)|$ は連続であるから最大値をもつ．それと 1 との大きい方を $C$ とすると

$$|f(x)| \leq C \text{ on } \mathbb{R}^n$$

が成り立つ．ゆえに

$$|f(\varepsilon x)| \leq C \text{ on } \mathbb{R}^n$$

となる．この $C$ は $\varepsilon$ と無関係である．また，

$$\partial^\alpha_x(f(\varepsilon x)) = \varepsilon^{|\alpha|}(\partial^\alpha_x f)(\varepsilon x)$$

であるから (1.1.11) とあわせると $\varepsilon$ に無関係な定数 $C_\alpha > 0$ があって

$$|\partial^\alpha_x(f(\varepsilon x))| \leq C_\alpha \varepsilon^{|\alpha|} \text{ on } \mathbb{R}^n$$

が成り立ち，これから (1.1.10) を得る．

$|x| < 1$ のとき (1.1.9) が成り立つことは (1.1.11) から得られるから，(1.1.9) を $|x| \geq 1$ のところで証明する．$y = \varepsilon x$ とおくと $\varepsilon^{|\alpha|} = |x|^{-|\alpha|}|y|^{|\alpha|}$ とかけるから

$$\partial^\alpha_x(f(\varepsilon x)) = |x|^{-|\alpha|}|y|^{|\alpha|}\partial^\alpha_x f(y)$$

そして (1.1.6) から $||y|^{|\alpha|}\partial^\alpha_x f(y)| \leq C_\alpha$ が (1.1.10) と同じようにして示されるから，

(1.1.9) が得られた．

(1.1.11) は明らかである．

**問 7.** $f \in \mathcal{S}$ ならば $\int f(x)dx$ が存在することを示せ．

**例 3.** $f \in \mathcal{S}$, $f(0) = 1$ とし $u$ は
$$\int |u|dx$$
が存在するような連続関数とすると
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int f(\varepsilon x)u(x)dx = \int u(x)dx$$
が成り立つ．

例 3 の積分は $\mathbb{R}^n$ 全体を積分領域とする広義定積分，すなわち次の式で定義される広義リーマン積分である．
$$\int u(x)dx = \lim_{K \to \infty} \int_{|x|<K} u(x)dx$$
この例は自明であるように思えるかも知れないが，証明しておく．積分をルベーグ積分の意味で考えているのであれば，$u(x) \in L^1$ として同じことが成り立つことはルベーグの定理（103 頁定理* を見よ）から直ちに得られる．我々も第 2 章からは積分はすべてルベーグ積分とするが，ここでは広義リーマン積分として証明する．

**証明.** 任意の $t > 0$ に対し $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ならば
$$\left| \int f(\varepsilon x)u(x)dx - \int u(x)dx \right| < t$$
となる $\varepsilon_0$ が存在することを示せばよい．まず，広義積分が存在するのであるから
$$\left| \int_{|x|>M} (f(\varepsilon x) - 1)u(x)dx \right| < \frac{t}{2}$$
となる $M$ が存在する．この $M$ を固定する．
$$f(x) = f(0) + f'(\theta x)x, \quad 0 < \theta < 1$$
と表せるから
$$f(\varepsilon x) - 1 = \varepsilon f'(\theta \varepsilon x)x$$

となる．$f'$ も $\mathcal{S}$ に入るから $|f'|$ の最大値を $C$ とし

$$C\int_{|x|\le M}|xu(x)|dx = C_M$$

とおく． $2\varepsilon_0 < tC_M$ と選べば $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ となる任意の $\varepsilon$ に対して

$$\left|\int_{|x|\le M}(f(\varepsilon x)-1)u(x)dx\right| < \frac{t}{2}.$$

**問 8.**　$f(x)$ は急減少関数，$u(x)$ は緩増加関数であるとき，すなわち $f\in\mathcal{S}$,　$g\in\mathcal{M}$ であるとき次の**部分積分の公式**が成立することを示せ．

$$\int(\partial_j f(x))\,u(x)dx = -\int f(x)\,(\partial_j u(x))\,dx. \tag{1.1.12}$$

**定義 1.1.4.**　(関数の台)

$\mathbb{R}^n$ で定義された関数 $g(x)$ の**台** (support) と呼ばれる集合 $\operatorname{supp} g$ を

$$\operatorname{supp} g = \overline{\{x;\ g(x)\neq 0\}}$$

によって定義する．

ここに，$A\subset\mathbb{R}^n$ に対し**閉包** (closure) $\overline{A}$ は次のように定義される集合である．$a\in\mathbb{R}^n$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対し $a$ を中心とする $\varepsilon$ 近傍

$$U_\varepsilon = \{x;\ |x-a|<\varepsilon\}$$

が $A$ に含まれない点も含まれる点も含んでいるとき，$a$ を $A$ の境界点であるという．境界点全体を $\partial A$ で表す．

$$\overline{A} = A\cup\partial A$$

である．$\operatorname{supp} g$ とは $g$ が零でない点の集合の閉包ということである．

**定理 1.1.5.**　(たたみ込み)

$f, g\in\mathcal{S}$ のとき $f$ と $g$ との**たたみ込み** (convolution) $f*g$ を

$$f*g(x) = \int f(x-y)g(y)dy$$

で定義する．

$f, g \in \mathcal{S}$ なら $f * g \in \mathcal{S}$ であり，次のことが成り立つ．

**1°** $\qquad f * g = g * f$

**2°** $\qquad D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g)$

**3°** $\qquad \operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g.$

ここに $A, B \subset \mathbb{R}^n$ のとき $A + B$ は $A + B = \{z;\ z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$ によって定義される集合である．

**証明．** 垣田 [1] 20 頁 を見よ．

たたみ込みは 第 2.4 節において重要な役割をする．ここではたたみ込みと例 1 の関数とを組み合わせると，種々の便利のよい関数をつくることができる場合のみをとり上げる．

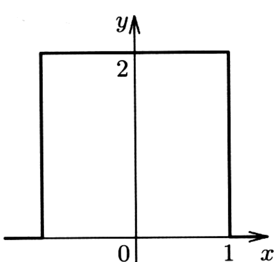
**例 4．** $x \in \mathbb{R}^1$ とする．

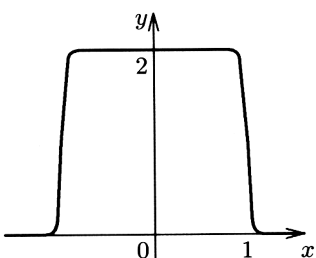
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \tag{1.1.13}$$

とし $g(x)$ を 例 1 の (1.1.8) で与えられるものとする．$0 < \varepsilon < 1$ とし $g_\varepsilon(x) = g(x/\varepsilon)\left(\int g(x/\varepsilon)dx\right)^{-1}$ とする．

$$f_\varepsilon = g_\varepsilon * f \tag{1.1.14}$$

とすると $y = f(x)$ と $y = f_\varepsilon(x)$ のグラフは次の図のようになる．




(1.1.13) と (1.1.14) のグラフ

**問 9.** 上の (1.1.14) で与えられる関数について次のことを示せ.

1° $f_\varepsilon'(x) = 0, \quad |x| \geq 1+\varepsilon, \quad |x| \leq 1-\varepsilon$

2° $f_\varepsilon'(x) \geq 0, \quad -1-\varepsilon < x < -1+\varepsilon$

3° $f_\varepsilon'(x) = 0, \quad -1+\varepsilon \leq x \leq 1-\varepsilon$

4° $f_\varepsilon'(x) \leq 0, \quad 1-\varepsilon < x < 1+\varepsilon$

5° $f_\varepsilon \in \mathcal{D}, \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(x) = f(x).$

**問 10.** $\varepsilon > 0$ を任意に定める. 上の (1.1.14) で与えられる関数を用いて次の条件を満たす関数 $f_j(x)$ をつくれ. このような $\{f_j\}$ を **1 の分解**と呼ぶ.

1° $f_j \in \mathcal{D}, \quad \operatorname{supp} f_j \subset \{x;\ j-\varepsilon < x < j+\varepsilon\}$

2° $f_j(x) = 1, \quad j+\varepsilon \leq x \leq j-\varepsilon$

3° $\displaystyle\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j(x) = 1.$

## 1.2. フーリエ変換

どのような関数がフーリエ級数で表されるのか，どのような関数がフーリエ変換できるのか，という問題は，フーリエ級数表示やフーリエ変換が微分方程式の理論において有力なものであるだけに古い歴史をもっている．序文でも触れたように，フーリエ級数は偏微分方程式を解くためにフーリエによって考えられたものである．そして，現在でもフーリエ解析についての教科書や研究書が数多く出版されている．擬微分作用素の理論を展開するについてもこれらの知識なしでは済まされないが，詳しい議論は専門書に任せることにして，本書では $\mathcal{S}$ とその双対 (dual) である $\mathcal{S}'$ の元のフーリエ変換だけを扱うことにする．$\mathcal{S}'$ のフーリエ変換については 第 2.2 節で述べる．

まず $\mathcal{S}$ の関数のフーリエ変換を定義する．

**定義 1.2.1.** ($\mathcal{S}$ のフーリエ変換)

$f(x) \in \mathcal{S}$ のとき $f(x)$ の**フーリエ変換** $\widehat{f}(\xi)$ を

$$\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx \tag{1.2.1}$$

で定義する．ここに $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$ である．そして積分は $\mathbb{R}^n$ 全体を積分領域とする定積分である．

$\widehat{g}(\xi) \in \mathcal{S}$ のとき共役フーリエ変換を

$$\overline{\mathcal{F}}[\widehat{g}](x) = \int e^{ix\cdot\xi}\widehat{g}(\xi)\bar{d}\xi$$

で定義する．ここに $\bar{d}\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$ である．

この記法 $\bar{d}\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$ は擬微分作用素の種々の公式を表すときに都合のよいものである．特に因数 $(2\pi)^{-n}$ は反転公式 (1.2.7) のためにも必要である．

$\mathbb{R}^1$ で考える場合の古典的なフーリエ積分表示との関係を注意しておく．

$$A(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos x\xi dx, \qquad B(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin x\xi dx$$

とするとき，

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(A(\xi)\cos x\xi+B(\xi)\sin x\xi)d\xi$$

と表されるというのが古典的な**フーリエ積分表示**である．

$$\cos y\xi\cos x\xi+\sin y\xi\sin x\xi=\cos(y\xi-x\xi)$$

を用いると

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(y\xi-x\xi)dyd\xi \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\cos(y\xi-x\xi)dyd\xi \end{aligned}$$

と表せる．これに

$$0=\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\sin(y\xi-x\xi)dyd\xi$$

を辺々加え，公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いると

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{i\xi(x-y)}dyd\xi \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi}f(y)dyd\xi=\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi}\widehat{f}\,(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

となる．これが後で述べる反転公式（定理 1.2.2 の 5°）である．

また，上の古典的フーリエ積分表示は周期が $T$ である周期関数 $f_T(x)$ の**フーリエ級数表示**

$$f_T(x)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(y)dy+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(A_n\cos\xi_n x+B_n\sin\xi_n x\bigr),$$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\Delta\xi=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(y)\cos\xi_n y dy,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\Delta\xi=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(y)\sin\xi_n y dy$$

ただし，$\Delta\xi = \dfrac{2\pi}{T}$, $\xi_n = \dfrac{2n\pi}{T}$

において $T \to \infty$ としたものになっている．

ここでフーリエ変換の基本的性質を述べる前に，重要な例を計算しておく．

**例 5.**

1° $$\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{\pm ix^2-\varepsilon^2x^2}dx = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad x\in\mathbb{R}^1$$

2° $$\mathcal{F}\left[e^{-|x|^2/2}\right] = (2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2},$$

$$\overline{\mathcal{F}}\left[(2\pi)^{n/2}e^{-|\xi|^2/2}\right] = e^{-|x|^2/2}, \qquad x\in\mathbb{R}^n$$

3° $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

**証明.** 1° の証明をする．

$$I_\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2-\varepsilon^2x^2}dx$$

とおく．

$$I_\varepsilon^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2-\varepsilon^2x^2}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy^2-\varepsilon^2y^2}dy$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(\varepsilon^2-i)(x^2+y^2)}dxdy$$

において $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ とおくと

$$I_\varepsilon^2 = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{(\varepsilon^2-i)r^2}rdrd\theta$$

$$= 2\pi\left[-\frac{1}{2(\varepsilon^2-i)}e^{-(\varepsilon^2-i)r^2}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{\varepsilon^2-i}$$

となる．$\varepsilon > 0$ のとき

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon x^2}\sin x^2 dx > 0$$

となることを用いると

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon^2 = i\pi$$

から

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

を得る．

$2^\circ$ を $n=1$ の場合に証明する．

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-|x|^2/2}](y) &= \int e^{-ixy-x^2/2}dx \\ &= e^{-|y|^2/2}\int e^{-(x+iy)^2/2}dx \\ &= \sqrt{2\pi}\, e^{-|y|^2/2}\end{aligned}$$

最後の積分は複素積分で積分路を $iy$ だけ平行移動している．

$3^\circ$ は問 6 ですでに求めたものである．

**定理 1.2.2.** **(フーリエ変換の基本的性質)**

$f(x)\in\mathcal{S}$ とすると $\widehat{f}(\xi)\in\mathcal{S}$ である．そして

$1^\circ$ **導関数のフーリエ変換**はフーリエ変換したものに $\xi$ を掛けたものになる．すなわち

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha f](\xi)=\xi^\alpha\mathcal{F}[f](\xi). \tag{1.2.2}$$

$2^\circ$ **フーリエ変換の導関数**は $-x$ を掛けてフーリエ変換したものになる．すなわち $g(x)=(-x)^\alpha f(x)$ とすると

$$D_\xi^\alpha\mathcal{F}[f](\xi)=\mathcal{F}[g](\xi) \tag{1.2.3}$$

と表される．

$3^\circ$ **フーリエ変換の平行移動**は $e^{ix\cdot k}$ を掛けてからのフーリエ変換に対応する．すなわち $k\in\mathbb{R}^n$ とし $g(x)=e^{ix\cdot k}f(x),\ h(x)=f(x-k)$ とすると

$$\mathcal{F}[g](\xi)=\mathcal{F}[f](\xi-k) \tag{1.2.4}$$

$$\mathcal{F}[h](\xi)=e^{-ik\cdot\xi}\mathcal{F}[f](\xi) \tag{1.2.5}$$

となる．

$4^\circ$ **フーリエ変換と相似変換の関係**は

$$\mathcal{F}[f(tx)](\xi)=t^{-n}\widehat{f}(\xi/t), \qquad 0\neq t\in\mathbb{R} \tag{1.2.6}$$

となる．

**5° 反転公式**

(1.2.7) $\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I \quad \text{on } \mathcal{S}_x, \qquad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I \quad \text{on } \mathcal{S}_\xi$

となる．この公式はかき直すと

$$\int e^{ix\cdot\xi}\left\{\int e^{-iy\cdot\xi} g(y)dy\right\} đ\xi = g(x)$$

すなわち

$$\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{g}(\xi)đ\xi = g(x),$$

$$\int e^{-ix\cdot\xi}\left\{\int e^{ix\cdot\eta}\widehat{g}(\eta)đ\eta\right\} dx = \widehat{g}(\xi)$$

とも表せる．

**6° パーセバル（Parseval）の公式**

(1.2.8) $\displaystyle\int f(x)\overline{g(x)}dx = \int \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}đ\xi.$

**7° フーリエ変換とたたみ込みの関係**

(1.2.9) $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g] \quad \text{or} \quad \widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$

(1.2.10) $\mathcal{F}[fg] = \mathcal{F}[f]\bar{*}\mathcal{F}[g] \quad \text{or} \quad \widehat{fg} = \widehat{f}\bar{*}\widehat{g}$

(1.2.11) $f * g = g * f, \qquad (f * g) * h = f * (g * h)$

が成り立つ． $f, g \in \mathcal{S}$ とする．たたみ込みは

$$f * g(x) = \int f(x-y)g(y)dy,$$

$$\widehat{f}\bar{*}\widehat{g}(\xi) = \int \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)đ\eta$$

であった．

後で公式 (1.2.8) が擬微分作用素を超関数に拡張するときに重要な役割をする．また，公式 (1.2.2) を見れば微分の記号 $D_x^\alpha$ が大変便利なものであることがわかる．

**証明.** $D_{x_j}$ を $D_j$ と略記する.

**1°** $f(x) \in \mathcal{S}$ であるから $x' = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$ とおくと

$$\mathcal{F}[D_j f](\xi) = \int_{R^{n-1}} dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix' \cdot \xi'} e^{-ix_j \xi_j} D_j f(x) dx_j$$

とかける. ここに部分積分の公式を用いる.

$$\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ e^{-ix_j \xi_j} f(x) \right\} = \frac{1}{i}(-i\xi_j) e^{-ix_j \xi_j} f(x) + e^{-ix_j \xi_j} D_j f(x)$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j \xi_j} D_j f(x) dx_j \\
&= \frac{1}{i} e^{-ix_j \xi_j} f(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \xi_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j \xi_j} f(x) dx_j \\
&= \xi_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_j \xi_j} f(x) dx_j
\end{aligned}$$

となり

$$\mathcal{F}[D_j f](\xi) = \xi_j \mathcal{F}[f](\xi)$$

を得る. 一般の $D_x^\alpha$ の場合は上の議論を繰り返せばよい.

**2°** $\alpha = (1, 0, \cdots, 0)$ の場合に証明する.

$g(x) = -x_1 f(x)$ とおく. $e^{-ix \cdot \xi} f(x) \in \mathcal{S}$ であるから微分と積分との順序が交換できる. したがって

$$\begin{aligned}
D_{\xi_1} \mathcal{F}[f](\xi) &= -i \int \partial_{\xi_1} \left\{ e^{-ix \cdot \xi} f(x) \right\} dx \\
&= -i \int (-ix_1) e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx \\
&= \int e^{-ix \cdot \xi} g(x) dx = \mathcal{F}[g](\xi)
\end{aligned}$$

となる.

**3°** 下の問 11 とする.

**4°** 下の問 12 とする.

**5°** (1.2.2),(1.2.3) によって $f \in \mathcal{S} \Rightarrow \widehat{f} \in \mathcal{S}$ となる．したがって $g \in \mathcal{S}$ とするとフビニの定理（本書 96 頁の定理* を見よ）によって積分の順序が自由に替えられて

$$
\begin{aligned}
(1.2.12)\qquad \int \widehat{f}(\xi)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi &= \int\left(\int e^{iy\cdot\xi}f(y)dy\right)g(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi \\
&= \int\left(\int e^{-i(y-x)\cdot\xi}f(y)dy\right)g(\xi)d\xi \\
&= \int\left(\int e^{-iz\cdot\xi}f(z+x)dz\right)g(\xi)d\xi \\
&= \int f(z+x)\left(\int e^{-iz\cdot\xi}g(\xi)d\xi\right)dz \\
&= \int f(z+x)\widehat{g}(z)dz
\end{aligned}
$$

を得る．ここで $g(\xi) = e^{-|\varepsilon z|^2/2}$ とおくと例 5 によって

$$
\widehat{g}(z) = \varepsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{z}{\varepsilon}\right|^2\right]
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
\int \widehat{f}(\xi)e^{-|\varepsilon\xi|^2/2}e^{ix\cdot\xi}d\xi &= \varepsilon^{-n}(2\pi)^{n/2}\int f(x+z)\exp\left[-\frac{1}{2}\left|\frac{z}{\varepsilon}\right|^2\right]dz \\
&= (2\pi)^{n/2}\int f(x+\varepsilon z)e^{-|z|^2/2}dz
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\varepsilon \to 0$ とすると

$$
\int \widehat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi = (2\pi)^n f(x)
$$

を得る．$đ\xi = (2\pi)^{-n}d\xi$ であるから (1.2.8) が示された．ここで $\varepsilon \to 0$ と積分との順序交換はルベーグの定理による．

**6°** は (1.2.12) で $x = 0$ とおいて 5°の結果を用いると得られる．

**7°** (1.2.9) はフビニの定理を用いて証明できる．

$$左辺 = \int e^{-ix\cdot\xi}\left(\int f(x-y)g(y)dy\right)dx$$
$$= \int\left(\int e^{x(x-y)\cdot\xi}f(x-y)dx\right)e^{y\cdot\xi}g(y)dy = 右辺$$

となる．(1.2.10) は (1.2.6) と上の証明をあわせると得られる．(1.2.11) は上の二つをあわせて得られる．

**問 11.** フーリエ変換したものの平行移動は $e^{ix\cdot k}$ を掛けてからのフーリエ変換に対応することを示せ．

**問 12.** 平行移動してからフーリエ変換することは，フーリエ変換してから $e^{-ik\cdot\xi}$ を掛けることに等しいことを示せ．

**問 13.** $f\in\mathcal{S}$, $g(x)=f(tx)$, $\mathbb{R}^1\ni t\neq 0$ とすると
$$\mathcal{F}[g](\xi)=|t|^{-n}\mathcal{F}[f](t^{-1}\xi)$$
となることを示せ．

**問 14.**

$$f\in\mathcal{S} \ \Rightarrow\ |\widehat{f}(\xi)|\le\int|f(x)|dx$$

**問 15.** 定係数の微分多項式 $P$ に対し $\widehat{Pf}(\xi)=P(\xi)\widehat{f}(\xi)$ となることを示せ．

次の節で擬微分作用素の積の公式を述べるが，そのときに重要な役割をする振動積分についてここで述べておく．

**定理 1.2.3.** (振動積分の性質)

$\mathcal{A}$ を次の条件を満たす $C^\infty$ 関数 $a(y,\eta)$ 全体の集合とする．

(1.2.13) $\quad {}^\exists m,\ C_{\alpha\beta}>0;\quad |\partial_y^\alpha\partial_\eta^\beta a(y,\eta)|\le C_{\alpha\beta}(\langle y\rangle+\langle\eta\rangle)^m.$

そして，$f(y,\eta)\in\mathcal{S}$ を $f(0,0)=1$ を満たすものとすると

(1.2.14) $$\mathrm{Os}-\iint e^{iy\cdot\eta}a(y,\eta)dy đ\eta=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{iy\cdot\eta}f(\varepsilon y,\varepsilon\eta)a(y,\eta)dy đ\eta$$

と表し，**振動積分**と呼ぶ．次の**振動積分の性質**が成り立つ．

**1°** (1.2.14) の右辺は収束し，その値は $f$ の選び方には関係しない.

**2°** $a(y,\eta) \in \mathcal{A}$ とすると次の公式が成り立つ.

$$\text{(1.2.15)} \qquad \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} dy đ\eta = 1$$

$$\text{(1.2.16)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} a(y) dy đ\eta = a(0), \\ \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} b(\eta) dy đ\eta = b(0) \end{cases}$$

$$\text{(1.2.17)} \qquad \begin{cases} \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} y^\alpha a(\eta,y) dy đ\eta = \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} D_\eta^\alpha a(\eta,y) dy đ\eta, \\ \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} \eta^\beta a(\eta,y) dy đ\eta = \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} D_y^\beta a(\eta,y) dy đ\eta \end{cases}$$

$$\text{(1.2.18)} \qquad \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-i(y+y^0)\cdot(\eta+\eta^0)} a(\eta+\eta^0, y+y^0) dy đ\eta$$
$$= \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} a(\eta,y) dy đ\eta.$$

振動積分が存在する関数族 $\mathcal{A}$ についての上の条件 (1.2.13) は，緩増加関数の条件（定義 1.1.2）より強いものである.

**証明.** **1°** $Q = 1 - i(y_1\partial_{\eta_1} + \cdots + y_n\partial_{\eta_n} + \eta_1\partial_{y_1} + \cdots + \eta_n\partial_{y_n})$ とし

$$\text{(1.2.19)} \qquad L = (1+|y|^2+|\eta|^2)Q$$

とおくと

$$Le^{iy\cdot\eta} = e^{iy\cdot\eta}$$

となる. $L$ の転置作用素を ${}^tL$ で表すと，部分積分の公式 (問 8) を用いて，任意の自然数 $l$ に対して

$$\iint e^{iy\cdot\eta} f(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta) dy đ\eta$$
$$= \iint \left(L^l e^{iy\cdot\eta}\right) f(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta) dy đ\eta$$
$$= \iint e^{iy\cdot\eta} \ ({}^tL)^l \{f(\varepsilon y, \varepsilon\eta) a(y,\eta)\} dy đ\eta$$

となる．${}^tL$ は $(1+|y|^2+|\eta|^2)^{-1}$ を掛けてから $\eta_j$ または $y_j$ について1回だけ微分し $y_j$ または $\eta_j$ を掛けるから，1回作用させるごとに少なくとも $(1+|y|^2+|\eta|^2)^{-1/2}$ ずつ掛かってゆくから，$a(y,\eta)$ が (1.2.13) を満たすことを用いれば，

$$m-l<-2n$$

となるように $l$ を選ぶと（被積分関数は絶対可積分となり極限と積分の順序が交換できて）例2と例3を用いて $f$ の選び方に無関係な値に収束することがわかる．

**2°** $y,\eta\in\mathbb{R}^1$ としてまず (1.2.15) を証明する．$y,\eta\in\mathbb{R}^n$ の場合は問20とする．

$y=x-\xi,\quad \eta=x+y$ とおくと $y\eta=x^2-\xi^2$ となる．そして $dy đ\eta=\pi^{-1}dyd\eta$ であるから

$$\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta}dy đ\eta=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-ix^2+i\xi^2}f(\varepsilon x,\varepsilon\xi)dxd\xi$$

となる．ここで $f(0,0)=1,\quad f\in\mathcal{S}$ であれば $f$ は何であってもよいから，

$$f(x,\xi)=e^{-x^2}e^{-\xi^2}$$

と選ぶ．例5の $1^\circ$ によって

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{-ix^2-\varepsilon^2x^2}dx=\sqrt{\pi}e^{i\pi/4},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int e^{-i\xi^2-\varepsilon^2\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}e^{i\pi/4}$$

であるから

$$\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta}dy đ\eta=1$$

を得る．

次に，(1.2.16) を証明する．$f$ を

$$f(y,\eta)=\chi(y)\chi(\eta),\qquad \chi\in\mathcal{S},\quad \chi(0)=1$$

と表されるものに選ぶ．公式 (1.2.6) を用いると

$$\text{第 1 式左辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\eta}\chi(\varepsilon y)\chi(\varepsilon\eta)a(y)dyđ\eta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-1}\int\chi(\varepsilon y)a(y)\mathcal{F}[\chi(\varepsilon\eta)](y)dy$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi\varepsilon)^{-1}\int\chi(\varepsilon y)a(y)\widehat{\chi}\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)dy$$

となる．ここで $z = y/\varepsilon$ とおくと

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi)^{-1}\int\chi(\varepsilon^2 z)a(\varepsilon z)\widehat{\chi}(z)đz$$

$$= \chi(0)a(0)\int e^{0\cdot z}\widehat{\chi}(z)dz$$

$$= \chi(0)a(0)\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\chi](0)$$

$$= \chi(0)a(0)\chi(0) = a(0)$$

を得る．

公式 (1.2.17) を $|\alpha| = 1$ として示す．$D_\eta = -i\partial_\eta$ である．部分積分の公式 (1.1.12) によって

$$\text{右辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint f(\varepsilon y,\varepsilon\eta)e^{-iy\eta}D_\eta a(y,\eta)dyđ\eta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} i\iint\partial_\eta\{f(\varepsilon y,\varepsilon\eta)e^{-iy\eta}\}a(y,\eta)dyđ\eta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} i\iint\{\varepsilon f'(\varepsilon y,\varepsilon\eta) - iyf(\varepsilon y,\varepsilon\eta)\}e^{-iy\eta}a(y,\eta)dyđ\eta$$

$$= \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\eta}ya(y,\eta)dyđ\eta$$

となる．

最後に公式 (1.2.18) を示す．

$x = y + y^0,\quad \xi = \eta + \eta^0$ とおくと $dyđ\eta = dxđ\xi$ であるから

$$\text{左辺} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-ix\xi}f(\varepsilon(x-y^0),\varepsilon(\xi-\eta^0))a(x,\xi)dxđ\xi$$

となる．

$$\begin{aligned} &f(\varepsilon(x-y^0),\varepsilon(\xi-\eta^0)) \\ &\quad = f(\varepsilon x,\varepsilon\xi)+\{f(\varepsilon(x-y^0),\varepsilon(\xi-\eta^0))-f(\varepsilon x,\varepsilon\xi)\} \\ &\quad = f(\varepsilon x,\varepsilon\xi)+g_\varepsilon(x,\xi) \end{aligned}$$

とおく.

$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-ix\xi}g_\varepsilon(x,\xi)a(x,\xi)dx đ\xi=0$ を示せばよい. $L$ を (1.2.19) のものとすると, この式の左辺は

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-ix\xi}({}^tL)^l\{g_\varepsilon(x,\xi)a(x,\xi)\}dx đ\xi$$

とかける. したがって, ここで極限と積分の順序が交換できる. $l=0,1,2,\cdots$ に対し

$$\lim_{\varepsilon\to 0}({}^tL)^l g_\varepsilon(x,\xi)=0$$

となるから与式を得る.

ここで述べた振動積分の公式は擬微分作用素の理論ではよく使われる. 本書でも擬微分作用素の積の公式の証明, 形式的随伴作用素のシンボルの公式 (81 頁) の証明などで基本的役割をする.

**問 16.** $|\alpha|\neq 0$ ならば

$$\mathrm{Os}-\iint e^{-iy\cdot\eta}y^\alpha dy đ\eta=0$$

となることを示せ.

**問 17.** $y,\eta\in\mathbb{R}^1,\quad l,m\in\mathbb{Z}_+$ のとき,

$$\mathrm{Os}-\iint e^{-iy\cdot\eta}y^l\eta^m dy đ\eta$$

の値を求めよ. また $y,\ \eta\in\mathbb{R}^n,\quad \alpha,\ \beta\in\mathbb{Z}_+^n$ のとき

$$\mathrm{Os}-\iint e^{-iy\cdot\eta}y^\alpha\eta^\beta dy đ\eta$$

の値を求めよ.

**問 18.** $g(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ とする．

$$g^{\vee}(x) = g(-x)$$

を $g$ の**裏返し**と呼ぶ．次の関係を証明せよ．

$$\overline{\mathcal{F}}[g] = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}[g]^{\vee},$$
$$\mathcal{F}\left[\mathcal{F}[g]\right] = (2\pi)^{-n}g^{\vee}.$$

フーリエ変換によって微分が積に転換されることは公式 (1.2.2) によってわかる．これを拡張して，フーリエ変換によって定義される "**微分の拡張**" ともいえる作用素について触れておく．関数 $a(\xi)$ を，任意の $u(\xi) \in \mathcal{S}$ に対し $a(\xi)u(\xi) \in \mathcal{S}$ となるものとする．$a(\xi)$ によって次の式で定義される作用素を $A = a(D_x)$ で表す．

$$Af(x) = \overline{\mathcal{F}}[a(\xi)\widehat{f}(\xi)], \quad f \in \mathcal{S} \tag{1.2.20}$$

この $a(\xi)$ についての条件は強すぎる．

$\overline{\mathcal{F}}[a]$ が定義できて，さらに $\overline{\mathcal{F}}[a]*f$ が $f \in \mathcal{S}$ に対して定義でき，公式 (1.2.9) と同様の公式が成り立つのであれば，$A$ は

$$Af(x) = (\overline{\mathcal{F}} * f)(x)$$

とも表される．

**例 6.** $a(\xi) = \langle\xi\rangle^{-2}$ とする．任意の $f \in \mathcal{S}$ に対し $Af$ は $u - \triangle u = f$ の解を与える．ここに

$$\triangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

は**ラプラシアン** (Laplacian) と呼ばれる最も基本的な偏微分作用素である．

**証明．** $\langle\xi\rangle^2 = 1 + |\xi|^2$ であるから

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[(1-\triangle)Af] &= (1+|\xi|^2)(1+|\xi|^2)^{-1}\widehat{f}(\xi)\\ &= \widehat{f}(\xi)\end{aligned}$$

となり，$(1-\triangle)Af = f$ となる．

**例 7.** $a(\xi) = \exp[-ic\cdot\xi]$ とすると $Af(x) = f(x-c)$ となる.

**証明.** $$\overline{\mathcal{F}}[e^{-ic\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)] = \int e^{i(x-c)\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)đ\xi = f(x-c).$$

**問 19.** 1° $a(\xi) = \sin\omega\xi$ とする. $f \in \mathcal{S}$ に対し

$$(Af)(x) = \frac{f(x+\omega) - f(x-\omega)}{2i}$$

となることを示せ.

2° $a(\xi) = \cos\omega\xi$ のときはどうなるか.

**問 20.** $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ の場合に定理 1.2.3 の 2° を証明せよ.

**問 21.** 定理 1.2.2 の 6° (パーセバルの公式) を証明せよ.

## 1.3. 擬微分作用素の定義と積公式

擬微分作用素の定義をする前に，微分多項式 $P$ を例として説明する．前節の結果を利用すると，急減少関数 $u$ ，すなわち $u \in \mathcal{S}$ に対し $Pu$ を積分表示することができる．

$a_\alpha(x)$ を定義 1.1.2 で定義した無限回有界可微分関数，すなわち $a_\alpha(x) \in \mathcal{B}$ とし，

$$P = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

とする．定理 1.2.2 の 1° によって，$u(x) \in \mathcal{S}$ とすると

$$Pu(x) = \int e^{ix\cdot\xi} \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha \widehat{u}(\xi) đ\xi$$

となる．これは

$$p(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

とおくと

$$Pu(x) = p(x, D_x)u(x) = \int e^{ix\cdot\xi} p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) đ\xi \tag{1.3.1}$$

とかくことができる．

**問 22.** $f$ が緩増加関数で $u \in \mathcal{S}$ であれば $fu \in \mathcal{S}$ であることを用い $a_\alpha(x) \in \mathcal{M}$ のとき (1.3.1) の $Pu \in \mathcal{S}$ を示せ．

この公式を一般化して $p(x,\xi)$ が $\xi$ については多項式ではないが，多項式程度の増大しかしないような関数である場合を考える．

**定義 1.3.1.** (擬微分作用素とシンボル)

任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$\left| p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi) \right| \le C_{\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} \tag{1.3.2}$$

となる正定数 $C_{\alpha,\beta}$ が存在するとき $p(x,\xi)\in \mathrm{S}^m$ であると定義する．ここに

$$p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)=\partial_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi)$$
$$|\xi|^2=\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2,\quad \langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$$

である．そしてこの $p(x,\xi)$ を**シンボル**とする**擬微分作用素** $P$ を

$$(1.3.3)\qquad Pu(x)=\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi,\qquad u\in\mathcal{S}$$

で定義する．$\mathrm{S}^{-\infty}$ と $\mathrm{S}^{\infty}$ を

$$\mathrm{S}^{-\infty}=\bigcap \mathrm{S}^m,\qquad \mathrm{S}^{\infty}=\bigcup \mathrm{S}^m$$

で定義する．

$P$ が擬微分作用素であるとき，そのシンボルを

$$\sigma(P)(x,\xi)\quad \text{あるいは単に}\quad \sigma(P)$$

と表す．

$\mathrm{S}^{-\infty}\ni p(x,\xi)$ とは，任意の実数 $m$ に対して $\mathrm{S}^m\ni p(x,\xi)$ となることを意味し，$\mathrm{S}^{\infty}\ni p(x,\xi)$ とは，$\mathrm{S}^m\ni p(x,\xi)$ となる実数 $m$ が存在することを意味する．

**問 23.** 次のことを示せ．

1° $\quad a_\alpha(x)\in\mathcal{B}\Rightarrow \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\xi^\alpha\in \mathrm{S}^m$

2° $\quad \langle\xi\rangle^a\in \mathrm{S}^a,\quad a\in\mathbb{R}^1$

3° $\quad \exp[-|\xi|^2]\in \mathrm{S}^{-\infty}$

4° $\quad \exp[|\xi|^2]\notin \mathrm{S}^{+\infty}$.

**定理 1.3.2** (擬微分作用素の積公式)

**1°** $P$ を (1.3.3) で定義された擬微分作用素とすると

$$u\in\mathcal{S}\ \Rightarrow\ Pu\in\mathcal{S}$$

となる．

**2°** $p(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_j}$ $(j=1,2)$ とし，$f(y,\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n}_{y,\eta})$,　$f(0,0)=1$ とする．

$$p(x,\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint e^{-iy\cdot\eta} f(\varepsilon y, \varepsilon\eta) p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi) dy đ\eta$$

すなわち

$$p(x,\xi) = \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} p_1(x,\xi+\eta) p_2(x+y,\xi) dy đ\eta \tag{1.3.4}$$

とすると $p(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_1+m_2}$ となる．

**3°** $P$, $P_j$ をそれぞれ $\sigma(P)=p(x,\xi)$, $\sigma(P_j)=p_j(x,\xi)$, $j=1,2$ となる擬微分作用素とすると，(1.3.4) の $P$ に対し

$$P = P_1 P_2 \tag{1.3.5}$$

となる．すなわち (1.3.4) は**擬微分作用素の積のシンボルの公式**である．さらに，任意の $N \in \mathbb{Z}_+$ に対し

$$p(x,\xi) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} p_1^{(\alpha)}(x,\xi) p_{2(\alpha)}(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_1+m_2-N} \tag{1.3.6}$$

となる．(**積のシンボルの漸近展開公式**である．37 頁を見よ．)

**証明．**　$p_1$, $p_2$ は (1.3.2) を満たすから (1.3.4) の $p_1(x,\xi+\eta)p_2(x+y,\xi)$ は $(y,\eta)$ に関して $\mathcal{A}$ に属するから，この振動積分は定理 1.2.3 によって収束する．この (1.3.4) の $p(x,\xi)$ が $\mathrm{S}^{m_1+m_2}$ に入ることをまず示す．

$x$ または $\xi$ についての微分と，$\varepsilon \to 0$ とする極限および積分との順序交換可能であることが定理 1.2.3 と同様に示されるから，

$$\left| \langle\xi\rangle^{-(m_1+m_2)+|\alpha+\alpha'|} \mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi+\eta) p_{2(\beta')}^{(\alpha')}(x+y,\xi) dy đ\eta \right| \tag{1.3.7}$$

が $x,\xi$ に無関係な定数で評価されることを示せばよいが，それも

$$Q = \frac{\langle\xi+\eta\rangle^{m_1-|\alpha|}}{\langle\xi\rangle^{m_1-|\alpha|}} \frac{p_{1(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi+\eta)}{\langle\xi+\eta\rangle^{m_1-|\alpha|}} \frac{p_{2(\beta')}^{(\alpha')}(x+y,\xi)}{\langle\xi\rangle^{m_2-|\alpha'|}}$$

とおいて (1.1.7) と (1.3.2) とを用いると $|Q| \le C\langle\eta\rangle^{m_1-|\alpha|}$ が示される．(1.2.19) の $L$ を用いて $l$ を十分大にすると

$$\left|({}^tL)^l Q\right| \leq C(1+|y|^2+|\eta|^2)^{-(2n+1)/2}$$

となることが定理 1.2.3 と同様にして示されるから，(1.3.7) が定数で評価できる．

次に (1.3.5) すなわち $P = P_1P_2$ の証明をする．$u(x) \in \mathcal{S}$ とする．

$$\begin{aligned} P_1u(z) &= \int e^{iz\cdot\xi} p_1(z,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi, \\ \widehat{P_2u}(\zeta) &= \int e^{-iz\cdot\zeta} P_2(z)dz \\ &= \int e^{-iz\cdot\zeta} \int e^{iz\cdot\xi} p_2(z,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi dz \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} P_1P_2u(x) &= \int e^{ix\cdot\zeta} p_1(x,\zeta)\widehat{P_2u}(\zeta)đ\zeta \\ &= \int e^{ix\cdot\zeta} p_1(x,\zeta) \int e^{-iz\cdot\zeta} \int e^{iz\cdot\xi} p_2(z,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi dz đ\zeta \end{aligned}$$

となる．

$g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,　$g(0) = 1$ とし

$$p_{1\varepsilon}(x,\zeta) = g(\varepsilon\zeta)p_1(x,\zeta), \qquad p_{2\varepsilon}(z,\xi) = g(\varepsilon z)p_2(z,\xi)$$

とおくと

$$P_1P_2u(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{ix\cdot\zeta} p_{1\varepsilon}(x,\zeta) \int e^{-iz\cdot\zeta} \int e^{iz\cdot\xi} p_{2\varepsilon}(z,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi dz đ\zeta$$

と表せる．被積分関数は $\xi, z, \zeta$ について $\mathcal{S}$ に入っているから積分の順序が変更できて

$$\begin{aligned} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int e^{ix\cdot\xi} \iint e^{*} p_{1\varepsilon}(x,\zeta)p_{2\varepsilon}(z,\xi)dzđ\zeta\hat{u}(\xi)đ\xi \\ &= \int e^{ix\cdot\xi} \left\{ \lim_{\varepsilon\to 0} \iint e^{*} p_{1\varepsilon}(x,\zeta)p_{2\varepsilon}(z,\xi)dzđ\zeta \right\} \hat{u}(\xi)đ\xi \end{aligned}$$

ただし，$e$ の肩にある $*$ は

$$* = -ix\cdot\xi + ix\cdot\zeta - iz\cdot\zeta + iz\cdot\xi = i(x-z)\cdot(\zeta-\xi)$$

である．

したがって $x-z=-y$, $\zeta-\xi=\eta$ すなわち

$$z=x+y, \quad \zeta=\xi+\eta$$

とおくと，ヤコビアンは 1 であるから右辺の積分の中の

$$\{\ \ \}=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{-iy\cdot\eta}p_{1\varepsilon}(x,\xi+\eta)p_{2\varepsilon}(x+y,\xi)dy đ\xi=p(x,\xi)$$

となる．ゆえに $P_1P_2u(x)=Pu(x)$ となる．

最後に (1.3.6) の証明をする．テーラーの公式 (1.1.5) を用いると

$$p_1(x,\xi+\eta)=\sum_{|\alpha|\le N-1}\frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha p_1(x,\xi)$$
$$+\sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\alpha!}\eta^\alpha\int_0^1(1-t)^{N-1}p_1^{(\alpha)}(x,\xi+\eta)dt$$

と表せる．ここで振動積分の公式 (1.2.20) を用いると

$$\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta}\eta^\alpha p_1^{(\alpha)}(x,\xi)p_2(x+y,\xi)đyđ\eta=p_1^{(\alpha)}(x,\xi)p_{2(\alpha)}(x,\xi)$$

となる．

$$\mathrm{Os}\text{-}\iint \eta^\alpha\int_0^1(1-t)^{N-1}p_1^{(\alpha)}(x,\xi+t\eta)p_2(x+y,\xi)đyđ\eta$$

が $\mathrm{S}^{m_1+m_2-N}$ に入ることは (1.3.7) と同様にして示される．

**問 24.** $P_j\in\mathrm{S}^{m_j}$ ならば，任意の $c_j\in\mathbb{C}$ に対し

$$c_1p_1(x,\xi)+c_2p_2(x,\xi)\in\mathrm{S}^m, \qquad m=\max\{m_1,\ m_2\}$$

となることを示せ．

公式 (1.3.6) で $N=1$ とすると，積のシンボルとシンボルの積との差が $\mathrm{S}^{m_1+m_2-1}$ に入ることがわかる．一般の $N$ の場合は，ライプニッツの公式の一般化であると考えられる．$p_2(x,\xi)$ の $x$ の部分に作用した分だけ $u(x)$ に作用する分が減っているわけである．

公式 (1.3.6) の中にある

$$\sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} p_1^{(\alpha)}(x,\xi) p_{2(\alpha)}(x,\xi)$$

は $p(x,\xi)$ を近似していると考えられる．$P$ のシンボル $p(x,\xi)$ が $p_1$ と $p_2$ を用いていくらでも近似できる公式になっている．公式 (1.3.4) は積分を含むので $p(x,\xi)$ の形を計算して求めるのに適していない場合が多い．その代りに，この和が近似を与える．どちらも重要かつ有用な公式である．

**例 8.** $\sigma(P) = p(x,\xi)$ が $m$ 次の微分多項式であり，$\sigma(Q) = q(x,\xi) \in \mathrm{S}^\infty$ であるとする．$p(x,\xi) = \sigma(PQ)$ とすると，

$$p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(x,\xi) q_{(\alpha)}(x,\xi)$$

と表せることを示せ．

**解.** 問 1 と全く同様である．

**問 25.** 次のことを示せ．

1° $\sigma(P) = a(x)$, $\sigma(Q) = q(x,\xi)$ のとき $\sigma(PQ) = a(x)q(x,\xi)$ となる．

2° $\sigma(P) = p(x,\xi)$, $\sigma(Q) = q(\xi)$ のとき $\sigma(PQ) = p(x,\xi)q(\xi)$ となる．

**問 26** 次の問に答えよ．

1° $x \in \mathbb{R}^3_x$, $\xi \in \mathbb{R}^3_\xi$ とする．

$$\sigma(P) = p(x,\xi) = |\xi|^2 + |x|^2 + 1,$$
$$\sigma(Q) = q(x,\xi) = (|\xi|^2 + |x|^2 + 1)^{-1}$$

であるとき $\sigma(PQ)$ を計算せよ．

2° $x \in \mathbb{R}^1_x$, $\xi \in \mathbb{R}^1_\xi$ とする．

$$\sigma(P) = p(x,\xi) = \sin\xi + |x|^2 + 1,$$
$$\sigma(Q) = q(x,\xi) = (\sin\xi + |x|^2 + 1)^{-1}$$

であるとき $r(x,\xi) = \sigma(PQ) - 1 \in \mathrm{S}^{-1}$ となるか．

**例 9.** $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$ とし $\sigma(P) = (1+\xi^2)^{-1}$ とする．

$$\lim_{n\to\infty} P^n\varphi(x) = 0$$

を示せ．

**解.**

$$\begin{aligned} P^n\varphi &= \int e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-n}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \int_{|\xi|<h} + \int_{|\xi|\geq h} e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-n}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi \\ &= \varphi_{n,1}(x) + \varphi_{n,2}(x) \end{aligned}$$

と表す．$\varepsilon$ を正定数とする．

フーリエ変換は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ へ写すから $\widehat{\varphi}(\xi) \in \mathcal{S}$ である．よって，例 2 によって $|\widehat{\varphi}(\xi)| < C$ となる定数 $C$ が存在する．したがって

$$\left|e^{ix\xi}(1+\xi^2)^{-n}\widehat{\varphi}(\xi)\right| < C$$

となる．$C$ は $n$ に無関係になっていることに注意．したがって $h$ を十分小さくすると

$$|\varphi_{n,1}(x)| \leq 2hC < \varepsilon$$

とできる．

次にこの $h$ に対して $\varphi_{n,2}$ を評価する．

$$|\varphi_{n,2}(x)| \leq (1+h^2)^{-n}\int |\widehat{\varphi}(\xi)|d\xi$$

となり

$$\int |\widehat{\varphi}(\xi)|d\xi < C$$

となる $C$ が存在するから，$h$ を固定して $n$ を十分大きくすると

$$|\varphi_{n,2}(x)| < \varepsilon$$

となるようにできる．これら二つの評価をあわせると

$$|\varphi(x)| < 2\varepsilon$$

となる．$\varepsilon$ は任意であったから

$$\lim_{n\to\infty} |P^n\varphi(x)| = 0$$

である．

**問 27.** $a(x)$ は緩増加関数であって $a(x)>0$ であるとし

$$p(x,\xi)=a(x)\langle\xi\rangle,\qquad q(x,\xi)=\frac{1}{p(x,\xi)}$$

とする.

1°
$$\sigma(PQ-I)\in \mathrm{S}^{-1}$$

を示せ.

2°
$$\sigma(PQ)-\{1+r(x,\xi)\}\in \mathrm{S}^{-2}$$

となるシンボル $r(x,\xi)$ を求めよ.

**問 28.** $p(x,\xi)\in \mathrm{S}^{m}$, $q(x,\xi)\in \mathrm{S}^{m'}$ とする.

$$\sigma(PQ-QP)\in \mathrm{S}^{m+m'-1}$$

を示せ.

**定義 1.3.3.** (交換子，ポアソンの括弧式)

$PQ-QP$ を $[P,\ Q]$ で表し，**交換子** (commutator) と呼ぶ. また

$$\{p,\ q\}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\frac{\partial q}{\partial x_j}-\frac{\partial p}{\partial x_j}\frac{\partial q}{\partial \xi_j}\right)$$

を**ポアソンの括弧式** (Poisson bracket) と呼ぶ.

**問 29.** 交換子とポアソンの括弧式との間には次の関係があることを示せ.

$$\sigma([P,\ Q])-\{p,\ q\}\in \mathrm{S}^{m+m'-2}.$$

**問 30.** 次の $p,\ q$ に対してポアソンの括弧式を求めよ.

1°　$p(x,\xi)=|\xi|^2+|x|^2+1,\qquad q(x,\xi)=(|\xi|^2+|x|^2+1)^{-1}$

2°　$p(x,\xi)=a(x)\langle\xi\rangle,\qquad q(x,\xi)=\dfrac{1}{p(x,\xi)}.$

## 1.4. 漸近展開公式とパラメトリックスの構成

前節の公式 (1.3.6) のような形の公式は擬微分作用素を扱うときによく現れるものである．この公式 (1.3.6) は これの逆の形の公式，すなわち，

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots, \quad \lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$$

とするとき，シンボルの列 $p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_j}$, $\quad j = 0, 1, 2, \cdots$ に対して

$$p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_N}$$

となるシンボル $p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$ が存在するというヘルマンダの定理（定理 1.4.2）とあわせて擬微分作用素の重要な公式である．

まず，$p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$ に対して，それの漸近展開が存在するということの定義を述べる．

**定義 1.4.1.** （シンボルの漸近展開，主シンボル）

数列 $\{m_j\}$ を

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots, \quad \lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$$

を満たすものとする．$p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$ に対して，シンボルの列 $p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_j}$ $\quad j = 0, 1, 2, \cdots$ が存在して，任意の $N \geq 1$ に対して

$$p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_N} \tag{1.4.1}$$

が成り立つとき，$p(x,\xi)$ は $\{p_j(x,\xi)\}$ によって漸近展開されるといい

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi) \tag{1.4.2}$$

と表す．そして，$\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ を $p(x,\xi)$ の**漸近展開**と呼ぶ．

シンボル $p_0(x,\xi)$ を**主シンボル**という．

この無限級数は収束するとはかぎらないが，有限和は上の (1.4.1) の意味で

$p(x,\xi)$ の近似を与える．これが，漸近展開と呼ばれる理由である．上の定義を用いると，定理 1.3.2 の公式 (1.3.6) は

$$p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} p_1^{(\alpha)}(x,\xi) p_{2(\alpha)}(x,\xi)$$

として，$P_1$ と $P_2$ の作用素としての積のシンボル $\sigma(P_1P_2)$ が $\{p_j(x,\xi)\}$ によって漸近展開されるということを述べているわけである．

$p(x,\xi)$ が $x$, $\xi$ の関数としてよくわかっているものなら，それの漸近展開をわざわざ考える必要はない．$p(x,\xi)$ が存在すること，ただ一つであることが理論的に知られる場合でも，具体的なシンボルの形が得られるとはかぎらない．また，振動積分によってのみ与えられる場合もある．このようなときに，漸近展開があれば，あるいはその初めのいくつかの項を知れば応用上十分有効であることがある．

また，定義からいうと $p(x,\xi)$ は $p(x,\xi)$ の主シンボルということになるので定義する意味がないようにも見えるがそうではない．$p(x,\xi)$ が $\xi$ の関数としてよい性質がなくとも $p_0(x,\xi)$ がよい性質，例えば $\xi$ について斉次式になる場合は，主シンボルだけを扱って種々のことが調べられて有力である．$p(x,\xi)$ が $m$ 次の微分多項式のシンボルである場合には $p_0(x,\xi)$ としては $m$ 次斉次多項式を選べる．

シンボルの積 $p_1(x,\xi)p_2(x,\xi)$ が積のシンボル $\sigma(P_1P_2)$ の主シンボルであることは重要である．

次に，まずシンボルの列 $\{p_j(x,\xi)\}$ がまず与えられる場合を考える．擬微分作用素の理論では，目的のシンボルが得られるより先にそれを近似してゆくシンボルの列 $\{p_j(x,\xi)\}$ が得られることがある．このとき $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ を漸近展開とするシンボル $p(x,\xi)$ が存在するという定理（漸近展開についてのヘルマンダの基本定理）が重要である．これが次の定理である．

**定理 1.4.2.** **(ヘルマンダの定理：漸近展開)**

$$m = m_0 \geq m_1 \geq m_2 \geq \cdots, \quad \lim_{j\to\infty} m_j = -\infty$$

とする．

$$p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_j}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

が与えられたとすると

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

となる $p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$ が存在する．

**証明．** $\psi(\xi) \in \mathrm{C}^\infty$ を

$$0 \leq \psi(\xi) \leq 1, \quad \psi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \leq 1, \\ 1, & |\xi| \geq 2 \end{cases}$$

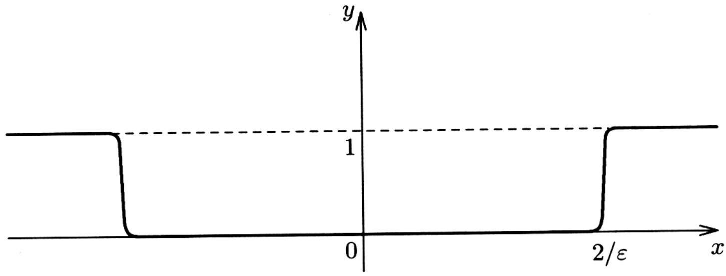
を満たすものとする．$\{\varepsilon_j\}$ を

$$1 \geq \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \cdots, \quad \lim_{j\to\infty} \varepsilon_j = 0$$

であって，後で決めるような条件を満たすものとすると

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi(\varepsilon_j \xi) p_j(x,\xi)$$

が収束して，求めるものとなることが次のようにして示される．




$\psi(\varepsilon\xi)$ のグラフ

$$\psi(\varepsilon\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \le \varepsilon^{-1}, \\ 1, & |\xi| \ge 2\varepsilon^{-1} \end{cases}$$

であるから

$$|\xi| \le \varepsilon^{-1} \text{ または } |\xi| \ge 2\varepsilon^{-1} \text{ のとき } \partial_\xi^{(\alpha)}\psi(\varepsilon\xi) = 0,\ |\alpha| \ne 0$$

となる．また，任意の $\xi$ に対して，

$$|\alpha| \ne 0 \text{ ならば } |\partial_\xi^\alpha \psi(\varepsilon\xi)| \le C_\alpha |\varepsilon|^{|\alpha|}$$

となることが $1-\psi \in \mathcal{S}$ と例2とから直ちに得られる．また，$|\alpha| \ne 0$ ならば，任意の $\xi$ に対して

$$(1.4.3) \qquad \left|\partial_\xi^\alpha \psi(\varepsilon\xi)\right| \le C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$$

も成り立つ．上の二つの $C_\alpha$ は同じものではないが大きい方をとればそれでどちらの不等式も成立するから，区別する必要はない．これからも式ごとに異なる定数を同じ文字で表すことがよくある．

上に得られた不等式 (1.4.3) を用いると，任意の $j$ に対して

$$(1.4.4) \qquad \left|\partial_\xi^\alpha D_x \beta \left\{\psi(\varepsilon\xi) p_j(x,\xi)\right\}\right| \le C_{j,\alpha,\beta} \langle\xi\rangle^{m_j - |\alpha|}$$

が得られる．ここで，まだ決めていなかった $\varepsilon_j$ を不等式

$$|\alpha+\beta| \le j \text{ となるすべての } \alpha,\beta \text{ に対して } \quad 0 < \varepsilon_j \le 2^{-j} C_{j,\alpha,\beta}^{-1}$$

を満たすように定める．そうすると (1.4.4) とこの式とから $|\alpha+\beta| < j$ のとき

$$(1.4.5) \qquad \left|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \left\{\psi(\varepsilon_j\xi) p_j(x,\xi)\right\}\right| \le 2^{-j} \langle\xi\rangle^{m_j + 1 - |\alpha|}$$

が成り立つ．$\langle\xi\rangle < 1/\varepsilon_j$ なら $\psi(\varepsilon_j\xi) = 0$ であることを用いている．

この式を用いると (1.4.2) で与えられた和が収束して，その和は $\sum_{j=0}^\infty p_j(x,\xi)$ を漸近展開とすることが以下のようにして示される．単に収束することは (1.4.5) で $|\alpha+\beta| = 0$ とすればすぐにわかる．その和を $p(x,\xi)$ とおく．$\alpha_0, \beta_0 \in \mathbb{Z}_+$ を任意に定める．それに対し $j_0$ を

$$j_0 \ge |\alpha_0 + \beta_0| \quad \text{かつ} \quad m_{j_0} \le m - 1$$

となるものとする．そして

$$p(x,\xi) = \sum_{j=0}^{N-1} \psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi) = I_1 + I_2$$

とおく．$I_1 \in \mathrm{S}^m$ であることは有限和であることからわかる．$I_2 \in \mathrm{S}^m$ も $j_0$ の定め方と (1.4.5) とから

$$\left|\partial_\xi^{\alpha_0} D_x^{\beta_0} I_2\right| \le \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{-j}\langle\xi\rangle^{m-|\alpha|} \le \langle\xi\rangle^{m-|\alpha|}$$

となるからわかる．最後に漸近展開されることを示す．

$$p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x,\xi)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} (\psi(\varepsilon_j\xi) - 1)\, p_j(x,\xi) + \sum_{j=N}^{\infty} \psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi)$$

と書くと，最後の和 $\in \mathrm{S}^{m_N}$ であり（下の問 31），またその前の有限和が $\mathrm{S}^{-\infty}$ に入ることは

$$|\xi| \ge 2\varepsilon_{N-1}^{-1}, \quad j \le N-1 \quad \text{ならば} \quad \psi(\varepsilon_j\xi) = 0$$

となることから得られる．ゆえに

$$p(x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_N}$$

となり，漸近展開されることが示された．

**問 31．** $\psi$, $p_j \in \mathrm{S}^{m_j}$，ただし $m_j$, $\varepsilon_j$ は定理 1.4.2 のものとする．

$$\sum_{j=N}^{\infty} \psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi) \in \mathrm{S}^{m_N}$$

を示せ．

ここでパラメトリックスを定義し，ヘルマンダによるパラメトリックスの存在定理を述べる．パラメトリックスは，擬微分作用素の逆作用素に近い作用素である．ヘルマンダの定理は ある条件（H 条件と呼ばれる）を満たせばパラメトリックスが存在するというものである．

**定義 1.4.3.**　(パラメトリックス)

$p(x,\xi)-q(x,\xi)\in \mathrm{S}^{-\infty}$ のとき

$$p(x,\xi)\equiv q(x,\xi) \qquad \mathrm{mod}\ \mathrm{S}^{-\infty}$$

または，単に $p\equiv q$ と表す．$P\equiv Q$ とも表す．

$I$ を $\sigma(I)=1$ である擬微分作用素とする．$P$ を $\sigma(P)\in \mathrm{S}^m$ となる擬微分作用素とすると $P$ に対し

$$\sigma(PQ-I)\in \mathrm{S}^{-\infty} \quad かつ \quad \sigma(QP-I)\in \mathrm{S}^{-\infty}$$

いいかえると

$$PQ\equiv QP\equiv I$$

となる擬微分作用素 $Q$ を $P$ の**パラメトリックス**という．

次に述べるパラメトリックスが存在する十分条件についてのヘルマンダの定理は，条件そのものが応用上広いものであり重要であるが，それにも増してその証明が重要である．それは，証明がパラメトリックスを構成してみせるからで，この定理は証明をあわせて見ると，パラメトリックスの構成法を与える定理であるといえるわけである．

**定理 1.4.4.**　**(ヘルマンダの定理：パラメトリックスの構成)**

$p(x,\xi)\in \mathrm{S}^m$ が次の二つの条件（あわせて H 条件と呼ぶ）を満たすとする．

**H 条件**：

(H1)　定数 $R>0$, $C_0>0$, $m'$ が存在して

(1.4.6)　$$|p(x,\xi)|\geq C_0\langle\xi\rangle^{m'} \quad \text{for} \quad |\xi|\geq R$$

(H2)　さらに，任意の $\alpha,\beta$ に対し定数 $C_{0,\alpha,\beta}$ が存在して

(1.4.7)　$$|p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)/p(x,\xi)|\leq C_{0,\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|} \quad \text{for} \quad |\xi|\geq R$$

このとき，$P=p(X,D_x)$ に対しパラメトリックス $Q$ が存在する．そして

$$\sigma(Q)=q(x,\xi)\in \mathrm{S}^{-m'}$$

である．

さらに，$\psi(\xi) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$ を

$$0 \le \psi(\xi) \le 1 \quad \text{かつ} \quad \psi(\xi) = \begin{cases} 0, & |\xi| \le R, \\ 1, & |\xi| \ge 2R \end{cases}$$

とおいて $q_j(x,\xi),\quad j = 0, 1, 2, \cdots$ を

$$\begin{cases} q_0(x,\xi) = \psi(\xi)p(x,\xi)^{-1}, \\ q_j(x,\xi) = -q_0(x,\xi) \displaystyle\sum_{|\gamma|+k=j, k<j} \frac{1}{\gamma!} q_k^{(\gamma)}(x,\xi) p_{(\gamma)}(x,\xi), \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \cdots$$

とすると

$$q(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_j(x,\xi) \tag{1.4.8}$$

となる．

$\sigma(P)$ が H 条件を満たすとき単に " $P$ は H 条件を満たす" ともいう．H 条件では $m > m'$ でもよいことに注意．

**証明．** まず，

$$q(x,\xi) \in \mathrm{S}^{-m'} \tag{1.4.9}$$

$$q_0{}^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi) p^{(\alpha')}_{(\beta')}(x,\xi) \in \mathrm{S}^{|\alpha+\alpha'|} \tag{1.4.10}$$

を示そう．$|\xi| \ge 2R$ においては

$$\partial_{\xi_j} q_0 = -p^{-1}(\partial_{\xi_j} p) p^{-1},$$

$$D_{x_j} q_0 = -p^{-1}(D_{x_j} p) p^{-1}$$

であるから

$$q_0{}^{(\alpha)}_{(\beta)} = \sum_{\substack{\alpha^1+\cdots+\alpha^k=\alpha \\ \beta^1+\cdots+\beta^k=\beta \\ k \le |\alpha+\beta|}} a_{\alpha^1\cdots\alpha^k\beta^1\cdots\beta^k} \left(p^{-1} p^{(\alpha^1)}_{(\beta^1)}\right) \cdots \left(p^{-1} p^{(\alpha^k)}_{(\beta^k)}\right) p^{-1}$$

と表せる．これと，H 条件の (1.4.6) とを用いると (1.4.9) が得られる．また，H 条件の (1.4.7) とを用いると (1.4.10) が得られる．

$j=1,2,\cdots,l-1$ に対して $q_j \in \mathrm{S}^{-m'-j}$ であると仮定すると，(1.4.10) とこの仮定から $q_l \in \mathrm{S}^{-m'-l}$ となり定理 1.4.2 によって

$$(1.4.11)\qquad q \sim \sum_{j=1}^{\infty} q_j, \qquad q \in \mathrm{S}^{-m'}$$

となる $q$ が存在する．

$Q = q(x, D_x)$ とおく．積の漸近展開公式 (1.3.6) から

$$\sigma(QP) - \sum_{|\gamma|<N} \frac{1}{\gamma!} q^{(\gamma)} p_{(\gamma)} \in \mathrm{S}^{-m'+m-N}$$

となるが，これに (1.4.11) を用いると

$$\sigma(QP) - \sum_{|\gamma|<N} \frac{1}{\gamma!} \left( \sum_{j=0}^{N-1} q_j^{(\gamma)} p_{(\gamma)} \right) \in \mathrm{S}^{-m'+m-N}$$

となる．ところが (1.4.10′) から

$$\sum_{|\gamma|<N} \frac{1}{\gamma!} \left( \sum_{j=0}^{N-1} q_j^{(\gamma)} p_{(\gamma)} \right) - 1 \in \mathrm{S}^{-m'+m-N}$$

が成り立つから $\sigma(QP) - 1 \in \mathrm{S}^{-N}$ が任意の $N$ について成り立つことがわかった．よって

$$\sigma(QP) \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ \mathrm{S}^{-\infty}$$

となる．

$$\sigma(PQ) \equiv 1 \qquad \mathrm{mod}\ \mathrm{S}^{-\infty}$$

も同様にして示される．

(1.4.11) が成り立っているから (1.4.8) が成り立つ．

$P$ のパラメトリックスは $P$ の逆作用素ではない．ここで $P^{-1}$ について少し述べる．$Pu = f$ となる $u$ を求めることを考える．$PE = I$ となる $E$ が存在

したとする．両辺に作用させると，$u = Ef$ となる．これは

$$Pu = f \quad \Rightarrow \quad u = Ef$$

を意味する．これは，解 $u$ が一つしかないことを示している．一つもないかも知れないのであって，あれば一つということしかいえない．

$PE = I$ となる $E$ が存在したとする．その $E$ に対して $u = Ef$ とする．そして両辺に $P$ を作用させると $Pu = f$ となる．これは

$$u = Ef \quad \Rightarrow \quad Pu = f$$

が成り立つことを意味する．すなわち，解が与えられるわけである．しかし，一つかどうかについては，これだけではわからない．

$PE = EP = I$ が成り立つ（このとき $E$ は**逆作用素**であるといい $P^{-1}$ で表す）のであれば

$$u = Ef \quad \Leftrightarrow \quad Pu = f$$

といえる．存在と一意性が成り立っているわけである．

**例 10.** $P, E_1, E_2$ を擬微分作用素とし

$$PE_1 = I, \quad E_2P = I$$

が成り立つとする．そうすれば，$E_1 = E_2 = P^{-1}$ である．

**証明.** $E_1 = (E_2P)E_1 = E_2(PE_1) = E_2$
となるから，$E_1 = E_2$ である．これを $E$ とおくと $EP = PE = I$ ゆえに $E = P^{-1}$ である．この証明は，$P^{-1}$ の一意性の証明にもなっていることに注意せよ．

**問 32.** 次の $P$ について $P^{-1}$ を求めよ．

1° $P = \triangle + a$, $\mathrm{Re}\, a > 0$

2° $\sigma(P) = \langle \xi \rangle$.

**問 33.** 次の各 $P$ は H 条件を満たすか．H 条件を満たすものについてはパラメトリックスを求めよ．$P^{-1}$ が存在するならば $\sigma(P^{-1})$ を求めよ．

1° $P = \partial_t - \partial_x$

2° $P = \partial_t - i\partial_x$

3° $P = \triangle$

4° $P = \partial_t - \triangle$

5° $P = \partial_t^2 - \triangle$

6° $P = -\triangle + |x|^2$

7° $P = -\triangle + \langle x \rangle^2$

8° $P = \langle \xi \rangle.$

## 1.5. シンボルの位相

$\mathcal{S}$ の位相について述べ，シンボルの位相と作用素の位相とについて述べる．

$u_j, u \in \mathcal{S}$ とする．

"$j \to \infty$ のとき $u_j \to u$" とはどういうことか

$p_j, p \in \mathrm{S}^m$ とする．

"$j \to \infty$ のとき $p_j \to p$" とはどういうことか

ということを定義し，位相をどう定義し，どのような条件の下で

$p_j \to p$ のとき $P_j u \to Pu$

となるかを述べるわけである．位相を定義するのは，$j \to \infty$ と積分やフーリエ変換との順序交換ができる条件について調べるときに必要になる．

第 1.1 節では $\mathcal{S}$ が線形空間である $(f, g \in \mathcal{S} \Rightarrow af + bg \in \mathcal{S})$ ことだけを述べその位相については何も述べなかった．ここでは，まず $\mathcal{S}$ の位相から始める．$j \to \infty$ のとき $\varphi_j(x) \to \varphi(x)$ ($\mathcal{S}$ のなかで) をどう定義するのかということである．任意の $x$ について数列として収束するとき，各点収束するといわれるが，$\mathcal{S}$ の位相としてはこれは適当でない．また，一様収束，広義一様収束でも適当でない．$\mathcal{S}$ の位相を定義する前に フレッシェ空間 の定義をする．

**定義 1.5.1.** (半ノルム，フレッシェ空間)

**1°** $V$を線形空間とする．$[u]_l$, $l = 1, 2, \cdots$ が $V$ の単調増加な**可算半ノルム系**であるとは， $V \in u, v$ である任意の $u, v$ に対して次の条件が成り立つことをいう．

$[u]_l \in \mathbb{R}$,

$[u+v]_l \le [u]_l + [v]_l$,

$[\lambda u]_l = |\lambda| [u]_l$ 　　(すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して),

すべての $l$ に対して $[u]_l = 0$ ならば $u = 0$,

$$[u]_1 \le [u]_2 \le \cdots .$$

**2°** 単調増加な加算半ノルムの定義されている線形空間 $V$ が完備であるとき，$V$ は**フレッシェ空間**であるという．

$u_j, u \in V$ とする．$j \to \infty$ のとき $u_j$ が $u$ に $V$ の**半ノルムで収束する**とは

$$\text{任意の } l \text{ に対して} \quad \lim_{j\to\infty} [u-u_j]_l = 0$$

と定義する．これを $V$ の**位相で収束する**という．

$\{u_j\} \subset V$ が**コーシー列**であるとは

$$j, k \to \infty \;\Rightarrow\; u_j - u_k \to 0 \ (V\text{の半ノルムで})$$

ということである．そして，$V$ が**完備**であるとは，任意のコーシー列が収束するということである．

半ノルムが収束するということと $V$ の位相で収束するということは，違うことである．次の問の 3° を見よ．

**問 34.** 半ノルムについて次のことを示せ．

1°　$$[u]_l - [v]_l \le [u-v]_l$$

2°　$$u_j - u \to 0 \ (V\text{の位相で}) \Rightarrow \lim_{j\to\infty}[u_j]_l = [u]_l$$

3° "すべての $l$ に対して $\lim_{j\to\infty}[u_j]_l = [u]_l \Rightarrow u_j \to u$ ($V$ の位相で)" が成立しない例をあげよ．

$\mathcal{S}$ の位相と擬微分作用素のシンボルの位相について述べる．擬微分作用素の理論ではシンボルの漸近展開がよく用いられ，重要な役割をすることが多い．その一端は第 1.4 節で述べたとおりである．

しかし，第2章以下では偏微分方程式の初期値問題を扱うが，そのときにはシンボルが $x$ と $\xi$ を変数として含むだけではなく，パラメータ $t$ を含み $t \downarrow 0$ となるときにそのシンボルがどのシンボル空間でどんなシンボルに "収束" するかという議論が必要になる．そこで，$\mathrm{S}^m$ に半ノルム $|p|_l^{(m)}$ を定義してフレッシェ空間としての位相を与える．

半ノルム $|p|_l^{(m)}$ の右肩の $(m)$ は $\mathrm{S}^m$ の元としての半ノルムであることを示している．$m \le m'$ なら $\mathrm{S}^m \subset \mathrm{S}^{m'}$ であるから同じ $p$ に対して $\mathrm{S}^{m'}$ の元としての半ノルムを考えることもできる．どのシンボルクラスでの半ノルムであるかを示すために $(m)$ をつけるわけである．

**定理 1.5.2.** **($\mathcal{S}$ の位相，シンボルの位相)**

**1°** $\mathcal{S}$ は次の単調増加な加算半ノルム系によってフレッシェ空間となる．$f \in \mathcal{S}$ に対し

$$|f|_{l,\mathcal{S}} = \max_{j+|\alpha| \le l} \sup_x \{\langle x \rangle^j |\partial_x^\alpha f(x)|\} \tag{1.5.1}$$

**2°** $p \in \mathrm{S}^m$ に対し半ノルム $|p|_l^{(m)}$ を

$$|p|_l^{(m)} = \max_{|\alpha|+|\beta| \le l} \sup_{x,\xi} \left\{ |p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)| \langle \xi \rangle^{-m+|\alpha|} \right\}$$

によって定義すると $\mathrm{S}^m$ はフレッシェ空間となる．

シンボル空間の定義，すなわち

$$p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$$

の定義は

$$|p_{(\beta)}^{\alpha}(x,\xi)| \le C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-|\alpha|}$$

が成り立つ定数 $C_{\alpha\beta}$ が存在することであった．この式から上の半ノルムは

$$|p|_l^{(m)} = \max_{|\alpha|+|\beta| \le l} \inf\{C_{\alpha\beta}\}$$

と表せる．

**証明．** 1° の証明は，例 11 と問 35 とする．2° の証明も全く同様にできる．

**例 11.** $\mathcal{S}$ がフレッシェ空間になることを示せ．

**解．** $|f|_{l,\mathcal{S}}$，　$l = 0, 1, 2, \cdots$ が単調増加な可算半ノルムの条件をすべて満たすことは容易に確かめられるから，完備性だけを示せばよい．

$\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ を $\mathcal{S}$ のコーシー列とする．$\mathcal{S}$ の半ノルムの定義から

$$|D_x^\alpha f_j(x) - D_x^\alpha f_k(x)| \le |f_j - f_k|_{|\alpha|,\mathcal{S}} \to 0$$

となる．したがって $\{D_x^\alpha f(x)\}$ は $\mathbb{C}$ (複素数全体の空間) のコーシー列になり

$$\lim_{j\to\infty} D_x^\alpha f_j(x) = f_{[\alpha]}(x)$$

となる $f_{[\alpha]}(x) \in \mathbb{C}$ が存在する ($\mathbb{C}$ は完備であるから)．$j, k$ を十分大きくとって

$$|f_j - f_k|_{|\alpha|,\mathcal{S}} < \frac{1}{2}\varepsilon, \quad |D_x^\alpha f_j(x) - f_{[\alpha]}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となるようにしておくと

$$|D_x^\alpha f_k(x) - f_{[\alpha]}(x)| \le |f_k - f_j|_{|\alpha|,\mathcal{S}} + |D_x^\alpha f_j(x) - f_{[\alpha](x)}| < \varepsilon$$

となる．これは $k \to \infty$ のときに $D_x^\alpha f_k(x)$ が $f_{[\alpha]}(x)$ に一様収束することを示している．$\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ のときの $f_{[\alpha]}(x)$ を $f(x)$ とすると，$f \in \mathcal{S}$ となり

$$f_j(x) \to f(x) \quad (\mathcal{S} \text{ の半ノルムで})$$

が成立することが示される．

**問 35.** $\alpha = (0, 0, \cdots, 0)$ のときの $f_{[\alpha]}(x)$ を $f(x)$ とすると，$f \in \mathcal{S}$ となり

$$f_j(x) \to f(x) \quad (\mathcal{S} \text{ の半ノルムで})$$

となることを次のようにして示せ．

$x \in \mathbb{R}^1$ とする．$f_j \to f$ (一様に) とは，任意の正の数 $\varepsilon$ に対して，$x$ に無関係な整数 $N$ が，

$$j \ge N \quad \text{ならば} \quad |f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$$

となるように定められることである．

$f_j(x) \in \mathcal{S}$ とし，任意の $n$ に対し

$$\frac{d^n}{dx^n} f_j(x) \to f_{[n]}(x) \quad (\text{一様に})$$

であるとする．さらに，$f(x) = f_{[0]}$ とおく．次の $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ を示せ．

$1^\circ$ $\quad f_{[1]}(x) = f'(x)$

$2^\circ$ $\quad f \in \mathcal{S}$

$3^\circ$ $\quad f_j \to f \quad (\mathcal{S}$ の半ノルムで).

**問 36.** $\mathcal{S}$ の線形空間としてのベクトル演算と位相の整合性，すなわち

$$f_j \to f, \quad \psi_j \to g \Rightarrow af_j + b\psi_j \to af + bg$$

を示せ．

$\mathcal{S}$ がフレッシェ空間であることを示したが，ここで先に証明しなかったフーリエ変換についての重要な定理を述べる．その前に，二つのフレッシェ空間 $U, V$ が位相同型であるとはどういうことか，また，写像 $F: U \to V$ が位相同型写像であるとはどういうことかという定義を与えておく．

**定義*** （位相同型，位相同型写像）

$U, V$ をフレッシェ空間とする．

写像 $F: U \to V$ によって $U$ と $V$ とが**位相同型**であるとは，次の三つの条件

**1°** $F$ は 1 対 1 の写像であり

**2°** $u_j \to u$ （$U$ の半ノルムで） ならば $F(u_j) \to F(u)$ （$V$ の半ノルムで）

**3°** $F(u_j) \to F(u)$ （$V$ の半ノルムで） ならば $u_j \to u$ （$U$ の半ノルムで）

が成り立つ，すなわち $F$ も $F^{-1}$ も連続であることをいう．この $F$ のことを**位相同型写像**あるいは位相同型と呼ぶ．

**定理 1.5.3.** **（フーリエ変換の連続性）**

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \quad (\text{連続})$$

そして，$\overline{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ の逆写像である．すなわち

$$\overline{\mathcal{F}}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \quad (\text{連続})$$

であって

$$\overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I \quad (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \text{ の中で}), \qquad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I \quad (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \text{ の中で})$$

が成り立つ．

したがって $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ と $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ とは位相同型である．

**証明.** $\mathcal{F}$ の連続性について証明する．$\overline{\mathcal{F}}$ についても同様である．

$$f_j \to f \qquad (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x) \text{ の半ノルムで})$$

のとき

$$\widehat{f_j} \to \widehat{f} \qquad (\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \text{ の半ノルムで})$$

を示せばよいのであるが，それには

(1.5.2)　$|\widehat{f}|_{l,\mathcal{S}} \le C|f|_{l+n+1,\mathcal{S}}$

を示せば，半ノルム収束の定義である

$$|\widehat{f}_j - \widehat{f}|_{l,\mathcal{S}} \to 0 \quad (\text{すべての } l \text{ に対して})$$

が，

$$|\widehat{f}_j - \widehat{f}|_{l,\mathcal{S}} \le C|f_j - f|_{l+n+1,\mathcal{S}}$$

と

$$|f_j - f|_{l+n+1,\mathcal{S}} \to 0$$

から示される．

(1.5.2) の証明は次のようにできる．

$$\begin{aligned}|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}| &= \left|\int e^{-ix\cdot\xi} D_x^\alpha (x\beta f(x))dx\right| \\ &\le \int |D_x^\alpha (x^\beta f(x))|dx\end{aligned}$$

である．ところが

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha (x^\beta f(x))| &\le \langle x\rangle^{-(n+1)}|\langle x\rangle^{n+1} D_x^\alpha (x^\beta f(x))| \\ &\le C|f|_{|\alpha+\beta|+n+1,\mathcal{S}}\langle x\rangle^{-(n+1)}\end{aligned}$$

となるから，これを上の式に代入すると

$$|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi)| \le C|f|_{|\alpha+\beta|+n+1,\mathcal{S}}$$

となる．

$C$ は各式によって異なるかも知れない定数である．$\int \langle x\rangle^{-(n+1)}dx = C$ に注意．

$\mathcal{S}$ についてのもっと詳しいことは，シュワルツ [2]，垣田 [1] などを見よ．

**定理 1.5.4.**　**(擬微分作用素の連続性)**

擬微分作用素は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への写像として連続になる．

**証明.** 擬微分作用素の定義式 (1.3.3) から

$$\begin{aligned}|Pu(x)| &\le |p|_0^{(m)} \int \langle m\rangle^m |\widehat{u}(\xi)| d\!\!{}^-\xi \\ &\le |p|_0^{(m)} |\widehat{u}|_{*+n+1,\mathcal{S}} \int \langle\xi\rangle^{-(n+1)} d\!\!{}^-\xi \\ &\le C_1 |p|_0^{(m)} |\widehat{u}|_{*+2n+2,\mathcal{S}}, \qquad * = \max\{0,m\}\end{aligned}$$

となる． 一方，$D_j = -i\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, $\partial_j = \dfrac{\partial}{\partial \xi_j}$ とし

$$\xi_j p \in \mathrm{S}^{m+1}, \quad D_j p \in \mathrm{S}^m, \quad \partial_j p \in \mathrm{S}^{m-1}$$

と

$$D_j Pu(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\big(\xi_j p(x,\xi) + D_j p(x,\xi)\big)\widehat{u}(\xi) d\!\!{}^-\xi,$$

$$-ix_j Pu(x) = \int e^{ix\cdot\xi}\big(\partial_j p(x,\xi)\widehat{u}(\xi) + p(x,\xi)\partial_j\widehat{u}(\xi)\big) d\!\!{}^-\xi$$

を組み合わせると，

$$|Pu_j - Pu|_{l,\mathcal{S}} \le |u_j - u|_{m+l,\mathcal{S}}$$

がすべての $l$ について成り立つから，連続性が示された．擬微分作用素のシンボルの半ノルムを用いて位相が $\mathrm{S}^m$ に対して定義されたことからシンボルの有界集合が定義できる．これは擬微分作用素の理論において重要な概念である．

**定義***

$B \subset S^m$ とする．任意の $p(x,\xi) \in B$ に対し $p$ にも $l$ にも無関係な定数 $M$ が存在して

$$|p|_l^{(m)} < M$$

となるとき $B$ は $\mathrm{S}^m$ **の有界集合**であるという．

本書ではこの有界集合の重要性が必要になる議論は次の定理以外はあまり現れない．

**定理***

$B=\{p_j\}$ が $\mathrm{S}^m$ の有界集合であって任意の $\alpha,\beta$ に対し

$$p_{j,(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\to p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi)\qquad (\text{広義一様})$$

ならば $p(x,\xi)\in\mathrm{S}^m$ となる．そして $u\in\mathcal{S}$ に対し

$$P_ju\to Pu\qquad (j\to\infty\text{ のとき }\mathcal{S}\text{ の位相で})$$

この定理については第 3.4 節で用いられるときに定理 3.4.1 としてあらためて述べる．

**問 37.** $\mathcal{B}$ はフレッシェ空間であることを示せ．$p(x,\xi)\in\mathrm{S}^m$ であるとき

$$P:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}\quad (\text{連続})$$

を示せ．

ここで，第 2 章で必要となる双対空間 (dual space) について述べておく．$V$ を線形位相空間とする．ここでは位相についての正確で詳しいことはすべて省き，何らかの意味で

$$v_j\to v\quad (j\to\infty\text{ のとき }V\text{ の位相で})$$

となるということが定義されているものとしておく．そうすると，$V$ を定義域とする連続線形汎関数 (continuous linear functional) $T$ を考えることができる．$T$ の具体的な例は第 2 章でいくらでもでてくるから，ここでは抽象的に考えておく． $T:\ V\to\mathbb{C}$ であって，$T$ について

$$\text{線形性：}\quad T(a_1v_1+a_2v_2)=a_1T(v_1)+a_2T(v_2),$$

$$\text{連続性：}\quad v_j\to v\quad\text{ならば}\quad T(v_j)\to T(v)$$

が成り立つとき $T$ は**連続線形汎関数**であるという．

すべての $T$ の集合を $V'$ で表す．$V'$ は線形空間になる．$\{T_j\}\subset V'$ とする．$\{T_j\}$ に対して

$$\lim_{j\to\infty}T_j(v)=T(v)\qquad (\text{任意の }v\in V\text{ に対し})$$

となる $T \in V'$ が存在するとき

$$T_j \to T \qquad (V' \text{ の弱位相で})$$

と定義すると，$V'$ は線形位相空間になる．これを $V$ の**双対空間**という．

**例 12.** $\mathcal{S}$ の双対空間を $\mathcal{S}'$ で表す．$\mathcal{S}'$ の位相は上で与えた**弱位相**である．すなわち，$\{T_j\} \subset \mathcal{S}'$ に対し $T \in \mathcal{S}'$ が，

$$\text{任意の } u \in \mathcal{S} \text{ に対して } \lim_{j\to\infty} T_j(u) = T(u)$$

となるときに "$T_j \to T$ ($\mathcal{S}'$の弱位相で)" によって定義される位相になるわけである．$f \in \mathcal{S}$ とし

$$T(u) = \int fu\,dx, \qquad u \in \mathcal{S}$$

とすると $T \in \mathcal{S}'$ となる．この $T$ と $f$ とを同一視する．そうすると $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ となる．$f \in \mathcal{B}$ としても $f \in \mathcal{M}$ としても同様である．したがって

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{S}'$$

となる．

**問 38.** $\mathcal{S}$ における各点収束，一様収束，半ノルム収束の関係について述べよ．

**問 39.** $p_j(\xi) = \langle\xi\rangle^{-j}$ とする．$j \to \infty$ のとき $p_j(\xi) \to 0$ はどのシンボル空間での半ノルム収束になるか．

**問 40.** $e(t,\xi) = e^{-t|\xi|^2}$ とする．

$$t \downarrow 0 \text{ のとき } e(t,\xi) \to 1 \quad (\mathrm{S}^0\text{の半ノルムで})$$

であることを示せ．

# 第2章

# 超関数上の擬微分作用素

微分方程式の解はもちろん微分できる関数である．しかし，微分の意味を拡張して，普通の意味では微分できない関数も微分方程式の解と考えなければならないことは，数学者よりも物理学者の方が先に気付いていた．まえがきでも述べたように，それが超関数と超関数微分である．

**方形波**の一つを表す関数を $s(x)$ とする．すなわち，$0 < x < 1$ では $s(x) = 1$，他では $s(x) = 0$ とする．$s(x)$ を台がコンパクトで無限回微分可能な関数，すなわち $\mathcal{D}$ の関数の極限として表せることを例 4 で示した．$s(x)$ は理想化された関数であり，現実の関数は $s_\varepsilon(x)$ のようなものであるという考え方もある．しかし，理想化された $s(x)$ を用いることの有利さは計り知れない．そのために普通では微分できない $s(x)$ が自由に微分できるようにする．それには $s(x)$ の微分（超関数微分）を

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s_\varepsilon(x) \quad と \quad \frac{d}{dx} \quad との順序交換可能$$

であるように定義すればよい．

まず，第 2.1 節で緩増加超関数 (temperate distribution) の族 $\mathcal{S}'$を定義し，いくつかの例と基本的な性質を述べ，超関数の微分を定義する．

第 2.2 節では超関数のフーリエ変換を定義する．これらは，擬微分作用素の定義域を広げるためにぜひ必要なことである．

第 2.3 節では擬微分作用素の定義域を $\mathcal{S}'$にまで拡張する．ここで，定義域を

広げるということは，擬微分作用素を$\mathcal{S}'$の元に対しても作用させることができるようにするということである．超関数微分を超関数擬微分に拡張するということである．微分を擬微分にまで拡張することと，作用する対象を滑らかな関数から超関数まで拡張することの二つによって偏微分方程式の理論は飛躍的に発展し見通しがよくなった．

第 2.4 節ではその応用の一つとして基本解と初期値問題の基本解が擬微分作用素として与えられることを示す．基本解や初期値問題の基本解が擬微分作用素のシンボルとして具体的に与えられるということは偏微分方程式の解が具体的に与えられることを意味する．これらは古典的な偏微分方程式についてはいままでにも得られていたが，シンボルと超関数を用いることによってわかりやすいものになったわけである．

第 2.5 節では偏微分方程式の解の性質を詳しく調べるために必要なものの一つとしてソボレフ空間について述べる．

超関数の理論と擬微分作用素の理論とは偏微分方程式の理論を飛躍的に発展させた．これによって数学的に新しい結果が多く得られたのであるが，それだけでなく，すでにわかっている結果についてもこれらの理論を用いることによって見通しがよくなり，新しい応用も可能になる．それについては第 3 章で述べる．

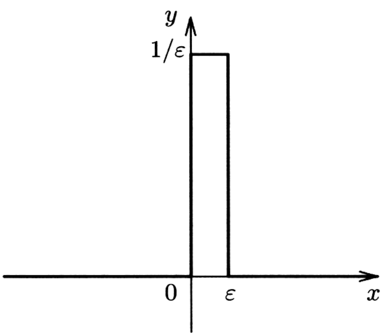
## 2.1. 超関数の定義と超関数微分

緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'$ を定義する．これはシュワルツの超関数の空間 $\mathcal{D}'$ よりは狭いが，以下の理論ではこれで十分である．そして，後で述べるように，$\mathcal{S}'$ の元をフーリエ変換してもやはり $\mathcal{S}'$ に入るから議論が簡単になる．

まず例から始める．

(2.1.1) $$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 < x < \varepsilon \text{ のとき}, \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

とする．




$g_\varepsilon(x)$ のグラフ．$\delta$ 型関数列の例

$y = g_\varepsilon(x)$ のグラフと $x$ 軸との囲む面積は $\varepsilon$ に関係なく常に 1 である．$\varphi(x)$ を $\mathcal{S}$ の関数とすると

(2.1.2) $$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$$

となる．それは次のようにして示される．平均値の定理によって

$$\varphi(x) - \varphi(0) = x\varphi'(\theta x), \qquad 0 < \theta < 1$$

と表せるから

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)\varphi(x)dx - \varphi(0)\int_0^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)dx = \int_0^{\varepsilon} xg_\varepsilon(x)\varphi'(\theta x)dx$$

とかける．そして

$$0 \le x \le \varepsilon \text{ のとき } |xg_\varepsilon(x)| \le 1, \quad |\varphi'(\theta x)| \le C$$

が成り立つから

$$\left| \int_0^\varepsilon xg_\varepsilon(x)\varphi'(\theta x)dx \right| \le \varepsilon C$$

となり (2.1.2) が成り立つ．

しかし，$g_\varepsilon(x)$ は各点収束の意味では 0 に収束する，すなわち任意の $x$ に対し

$$\lim_{\varepsilon \to 0} g_\varepsilon(x) = 0$$

であるから，極限と積分は交換可能ではない．これを，交換可能にするために，$g_\varepsilon(x)$ の "極限" を $\delta(x)$ で表し，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \tag{2.1.3}$$

となる "関数"（本当は後で述べる超関数）であるとする．

いいかえると $\delta(x)$ とは

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$

さらに

$$\int \delta(x)dx = 1$$

となる "関数" であるともいえる．このような考え方は古くから物理学者がしてきたものである．(以下，第 1 章と同様積分範囲を省略する.) 物理学者は，これを**ディラックのデルタ関数**と呼んでいる．普通の意味での関数ではないので (2.1.3) を

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$

とかく．関数列が上にあげた (2.1.1) の例のようにディラックのデルタ関数に収束するとき，**$\delta$ 型関数列**と呼ぶ．

連続関数 $f(x)$ に対し

$$|f(x)| \leq C\langle x\rangle^m$$

となる $m \in \mathbb{Z}_+$ と定数 $C$ が存在するとき $f$ は**緩増加連続関数**であるという. その全体を $\mathcal{M}_0$ で表す.

記号 $\langle\ ,\ \rangle$ は $f$ が緩増加連続関数であり, $\varphi \in \mathcal{S}$ であるときには

$$\langle f, \varphi\rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

である. 双対空間を用いてこれを拡張したものが超関数である.

**定義 2.1.1. （超関数, その位相, 台）**

**1°** $\mathcal{S}$ の双対空間すなわち $\mathcal{S}$ を定義域とする連続線形汎関数の全体を $\mathcal{S}'$とかき, その元を**緩増加超関数**と呼ぶ.

$\mathcal{E}, \mathcal{D}$ の双対空間をそれぞれ $\mathcal{E}', \mathcal{D}'$ で表す.

ここに $\mathcal{E}$ は $\mathrm{C}^\infty$ 関数の全体に位相を与えたものであり, $\mathcal{D}$ は $\mathrm{C}_0^\infty$ 関数の全体に位相を与えたものである.

$\varphi$ が関数, $f$ が超関数のとき, これらから双対関係によって定まる複素数を $\langle f, \varphi\rangle$ で表す.

**2°** $f, f_j \in \mathcal{S}'$ のとき

$$f_j \to f \quad (\mathcal{S}'\text{の中で}) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle f_j, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle, \quad {}^\forall\varphi \in \mathcal{S}$$

とする. ここに, $\langle f_j, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle, \quad {}^\forall\varphi \in \mathcal{S}$ は

すべての $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して $\langle f_j, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle$ となる

ことを表す.

**3°** $f \in \mathcal{D}'$ とする. 超関数 $f$ の台 $\mathrm{supp}\, f$ を

$$\mathrm{supp}\, f = \{a;\ \varphi \in \mathcal{D}, \mathrm{supp}\,\varphi \subset \mathrm{U}_\varepsilon(a) \Rightarrow \langle f, \varphi\rangle = 0 \text{ となる } \mathrm{U}_\varepsilon(a) \text{ が存在する }\}^c$$

と定義する. ただし $\mathrm{U}_\varepsilon(a) = \{x;\ |x-a| < \varepsilon\}$ であり $\mathrm{A}^c$ は A の補集合を表す. 三つの関数空間について

$$\mathcal{E} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{D}$$

が成立するから，その双対空間については

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

となる．このことを用いると "(2.1.1) の $g_\varepsilon(x)$ は $\mathcal{D}'$ の中で $\delta(x)$ に収束する" といえる．

第 1.5 節では $\mathcal{S}$ の位相について述べた（第 1 章の例 11）．上の $2^\circ$ で位相が一応定義されているように見えるが，$\mathcal{S}'$ の位相について述べるのは簡単でない．$\mathcal{E}', \mathcal{S}', \mathcal{D}'$ の位相については，シュワルツ [2]，垣田 [1] を見よ．

ここでは次の二点のみを注意しておく．

**1°** 超関数は普通の関数の拡張になっている．$f \in \mathcal{M}_0$ に対し

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

であると定義すれば，$f \in \mathcal{S}'$ となる．

**2°** 関数 $f(x)$ が連続でなくてもルベーグの意味で局所可積分で

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^l \quad \text{a.e.}$$

であるとき

$$\langle f, \varphi \rangle = \int f(x)\varphi(x)dx$$

と定義すれば $f \in \mathcal{S}'$ となる．これについては垣田 [1] 50 頁を見よ．

**問 1.** 次の二式を証明せよ．

1° $\mathcal{E} \supset \mathcal{S} \supset \mathcal{D}$

2° $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

また次を示せ．

3° $\mathcal{E}' =$ 台が有界な超関数全体

4° $f \in \mathcal{D}$ としての台 $= f \in \mathcal{E}'$ としての台

$f \in \mathcal{D}$ としての台の定義は定義 1.1.4 を見よ．

**問 2.** $g_\varepsilon$ を (2.1.1) のものとする．

$$g_\varepsilon(x) \;\to\; \delta(x)$$

を証明せよ.

**問 3.** 次の二つのことを示せ.

1°

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

とすると, $\varepsilon \to 0$ のとき $h_\varepsilon$は 0 に収束する.

2°

$$h_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^2}, & 0 < x < \varepsilon, \\ 0, & \text{上記以外} \end{cases}$$

とすると $\varepsilon \to 0$ のとき $h_\varepsilon$ は $\mathcal{D}'$ の元に収束しない.

$\mathcal{D}'$ は $\mathcal{D}$ の双対空間であるから遠方での挙動については制約がないが $\mathcal{S}'$ は $\mathcal{S}$ の双対空間であるから遠方での増大については制約がある. 次の二つの問を試みよ.

**問 4.** $\exp[x^2] \in \mathcal{D}'$ である. また $e^x \notin \mathcal{S}'$ である.

**問 5.** $x \in \mathbb{R}^1$とする.

$$\langle \log x_+, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^\infty \varphi(x) \log x dx,$$

$$\langle \log |x|, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \int_\varepsilon^\infty \varphi(x) \log x dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x) \log(-x) dx \right\}$$

と定義する. そうすれば, $\log x_+$, $\log |x| \in \mathcal{S}'$ となることを示せ.

**問 6.** $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi(0) \neq 0$ のとき $\displaystyle\int \frac{\varphi(x)}{x} dx$ は発散するから, $\dfrac{1}{x} \notin \mathcal{S}'$ である. それで超関数 $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ を

$$\langle \mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

と定義すると

$$\mathrm{vp}\,\frac{1}{x} \in \mathcal{S}'$$

である．このことを示せ．

vp はフランス語の valeur principle （主値）の略．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c+\varepsilon}+\int_{c-\varepsilon}^b f(x)dx$$

が存在するとき，その値を**コーシーの主値**と呼び

$$\mathrm{vp}\int_a^b f(x)dx$$

と表す．記号 vp はここからきている．また

$$\int_{|x|\geq\varepsilon} \quad \text{は} \quad \int_{-\infty}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\infty}$$

の意味である．

超関数の変数変換について考える．独立変数を変換すると超関数はどう変わるのであろうか．

$x\in\mathbb{R}^1$, $h$ は正定数とし，$f(x)$ は関数であるとする．$f(x)$ のグラフを右へ $h$ だけ平行移動したグラフの方程式が $g(x)$ であるとすると，$g(x)=f(x-h)$ となる．このことから $f$ を $h$ だけ平行移動する変換を

$$T(h)f=g$$

によって定義する．例えば $f(x)=x^2+1$ であれば $(T(h)f)(x)=(x-h)^2+1$ である．

$f\in\mathcal{S}'$ であるとき，$T(h)f\in\mathcal{S}'$ を関数の場合の自然な拡張になっているように定義する．$f\in\mathcal{M}$ ，すなわち $f$ が緩増加関数であるとき，任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対して

$$\langle T(h)f,\ \varphi\rangle=\langle f,\ T(-h)\varphi\rangle \tag{2.1.4}$$

が成り立つから，$\mathcal{S}'$ の元に対しても (2.1.4) によって $T(h)$ を定義すればよいことがわかる．

**問 7.** $f\in\mathcal{M}$ のとき (2.1.4) を証明せよ．

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathbb{R}^n$ の場合に拡張しても次のように定義できる．$h \in \mathbb{R}^n$ とする．$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し $f$ をベクトル $h$ だけ**平行移動**する演算 $T(h)$ を

$$\langle T(h)f,\ \varphi\rangle = \langle f,\ T(-h)\varphi\rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{S}$$

と定義する．ここに

$$(T(-h)\varphi)\,(x) = \varphi(x+h)$$

である．

$$T(h)f = f$$

を満たすとき，$f$ は周期 $h$ の**周期超関数**であるという．

**問 8.**　周期超関数の例をあげよ．

**問 9.**　任意の $h$ に対し $T(h)f = f$ となるならば $f$ は定数，すなわち

$$\langle f, \varphi\rangle = \int c\varphi(x)dx$$

と表されることを示せ．

次に，$A$ を $n$ 次実正則行列とする．$\varphi \in \mathcal{S}$ に対して

$$(T(A)\varphi)\,(x) = \varphi(Ax)$$

によって演算 $T(A)$ を定義する．これを用いて $f \in \mathcal{S}'$ に対して

$$\langle T(A)f,\ \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle f,\ T(A^{-1})\varphi\rangle$$

によって演算 $T(A)$ を定義する．

$A$ が直交行列であって $\det A = 1$ であるときは $T(A)$ は座標軸の回転を表し，

$$A = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

のときは $T(A)$ は**裏返し**を表す．このとき $f^\vee = T(A)f$ と表す．

$$f^\vee(x) = f(-x)$$

とおぼえるとよい．

$a > 0$ とし

$$A = \begin{pmatrix} a & & \\ & \ddots & \\ & & a \end{pmatrix}$$

のとき $T(A)$ は**相似変換**になっている．$f \in \mathcal{M}$ のとき

$$\langle T(A)f,\ \varphi\rangle = a^{-n}\int f(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx \tag{2.1.5}$$

となる．これは

$$(T(A)f)(x) = f(ax)$$

とおぼえるとよいことを示している．

一般の相似変換を与える行列は直交行列の定数倍である．

**問 10.** $f$ が緩増加関数であるとき公式 (2.1.5) を証明せよ．

上の相似変換 (2.1.5) において，$a > 0$ のとき $T(A)f = a^s f$ となる定数 $s$ が存在するならば $f$ は $s$ 次の**斉次超関数**であるという．

すべての回転に対し不変な超関数を，**球対称な超関数**という．

$f^\vee = f$　　となる超関数を**偶超関数**という．

$f^\vee = -f$　となる超関数を**奇超関数**という．

以上に述べたことをまとめて定理としておく．

**定理 2.1.2.**　(超関数の変数変換)

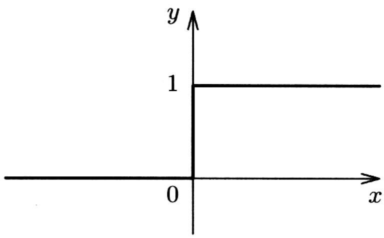
$f \in \mathcal{S}'$ とする．$f$ の平行移動，裏返し，相似変換は $\mathcal{S}'$ に属する超関数である．

**問 11.** $\delta(x)$ は $-n$ 次の斉次超関数であることを示せ．また $\delta(x)$ は球対称であることを示せ．

**問 12.** 球対称な超関数は偶超関数であるといえるか．

超関数の微分を考える．**ヘビサイドの関数**

$$Y(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$




ヘビサイドの関数のグラフ

やディラックのデルタ関数を見てもわかるように，超関数は普通の関数の意味では微分できない．そこで，超関数を定義したときと同様に超関数の微分も $\mathcal{D}$ や $\mathcal{S}$ の関数と対 (pair) にして定義する．

まず，$\mathbb{R}^1$ で考える．$f \in C^1$, $\varphi \in \mathcal{D}$ とする．そうすれば

$$\begin{aligned}\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \rangle &= \int \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \varphi(x) dx \\ &= -\int f(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= -\langle f, \frac{d}{dx} \varphi(x) \rangle\end{aligned}$$

であるから，これを拡張して $f \in \mathcal{D}'$ のときも

$$\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{d}{dx} \varphi \rangle$$

と定義する．ヘビサイドの関数 $Y(x)$ を超関数の意味で微分すると次のようになる．

**例 1．** (**ヘビサイド関数の導関数**) ヘビサイド関数の導関数を求めよ．

**解.**

$$\begin{aligned}\langle \frac{d}{dx}Y, \varphi\rangle &= -\langle Y, \frac{d}{dx}\varphi\rangle \\ &= -\int_0^\infty \frac{d}{dx}\varphi(x)dx \\ &= -\left[\varphi(x)\right]_0^\infty \\ &= \varphi(0)\end{aligned}$$

であるから,

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \delta(x)$$

となる.

ヘビサイドの関数は $x = 0$ で不連続であるが超関数の意味では微分できて $\delta(x)$ になる. $\delta(x)$ も超関数微分できる. **デルタ関数の導関数**は

$$\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$$

となる.

**問 13.** $\langle \delta', \varphi\rangle = -\varphi'(0)$ を証明せよ.

上の議論を $\mathbb{R}^n$ に広げて次のように定義する.

**定義 2.1.3.** **(超関数の微分)**

$f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ とする. $D_x^\beta f$ を

$$\langle D_x^\beta f, \varphi\rangle = \langle f, (-1)^{|\beta|}D_x^\beta \varphi\rangle, \qquad {}^\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

で定義する.

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. $D_x^\beta f$ を

$$\langle D_x^\beta f, \varphi\rangle = \langle f, (-1)^{|\beta|}D_x^\beta \varphi\rangle, \qquad {}^\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

で定義する.

**問 14.** 超関数は何回超関数微分しても超関数である. すなわち, 無限回超関数微分可能である. また

$$f_j \to f \quad (\mathcal{S}' \text{ の中で}) \;\Rightarrow\; D_x f_j \to D_x f \quad (\mathcal{S}' \text{ の中で})$$

となることを示せ.

**問 15.**　$\mathbb{R}^1$で考える．次の 1°, 2° を示せ．

1°
$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$
とする．
$$f_\varepsilon(x) \to \delta(x) \quad (\varepsilon \to 0 \text{ のとき}),$$
$$f'_\varepsilon(x) \to \delta'(x) \quad (\varepsilon \to 0 \text{ のとき})$$
となる．

2° 関数 $\operatorname{sgn} x$ を
$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$
と定義すると
$$\frac{d}{dx}\operatorname{sgn} x = 2\delta(x)$$
となる．

**問 16.**　$x \in \mathbb{R}^1$ とする．次の超関数微分を求めよ．

1°　$\log|x|$　　2°　$\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$

3°　$|x|$　　4°　$x_+^m$

ここに $m$ は正整数で $x_+^m$ は
$$x_+^m = \begin{cases} x^m, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$
によって定義される超関数である．

**定理 2.1.4.**　(フリードリックスの軟化子)

$L^1$ をルベーグの意味で絶対可積な関数全体とする．$\varphi \in \mathcal{S}$ を
$$0 \leq \varphi, \quad \varphi(0) = 1, \quad \int \varphi(x)dx = 1$$
を満たすものとする．
$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1$$
とおく．$f \in L^1$ とする．

$$\varphi_\varepsilon * f(x) = \int \varphi_\varepsilon(x-y)f(y)dy$$

で定義される $\varphi_\varepsilon*$ を**フリードリックスの軟化子** (mollifier) と呼ぶ．フリードリックスの軟化子は次の性質をもつ．

**1°** $\varphi_\varepsilon * f \in \mathcal{B}, \quad \lim_{|x|\to\infty} D_x^\alpha \varphi_\varepsilon * f(x) = 0$

**2°** $\int |\varphi_\varepsilon * f(x)|dx \leq \int |f(x)|dx$

**3°** $\varphi_\varepsilon * f \to f \quad (\varepsilon \to 0$ のとき $L^1$の中で$)$

**証明．** 熊ノ郷［1］24 頁を見よ．

$L^1$ については溝畑［2］122 頁を見よ．

$$\int |f(x)|dx < \infty$$

となる（不連続でもよい）関数である．

**例 2．** ($\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}'$ において 稠密) $f \in \mathcal{S}'$ に対して $\varphi_j \to f \quad$ ($\mathcal{S}'$の中で) となる $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}$ が存在する．このことを $\mathcal{S}$ は$\mathcal{S}'$ において **稠密** (dense) であるという．

**証明．** $\mathcal{D}$ が $\mathcal{D}'$ において 稠密 であるという有名な定理（シュワルツ［2］67 頁の定理 15）から直ちに得られる．

**例 3．** 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\langle f_j, \varphi\rangle$ がコーシー列となるならば $\mathcal{S}'$ の中で $f_j \to f$ となる $f \in \mathcal{S}'$ が存在する．

**証明．** (垣田［1］83 頁を見よ)

**定理 2.1.5．** **(超関数の表現定理)**

任意の $f \in \mathcal{S}'$ に対し $f = D_1^l D_2^l \cdots D_n^l g$ となる緩増加連続関数 $g$ と $l \in \mathbb{Z}_+$ が存在する．

**証明．** 例えば垣田［1］58 頁を見よ．

ここまでは超関数の例としては主として $\mathbb{R}^1$ のものであったが，次に $\mathbb{R}^n$ での $\delta(x)$ と $r^m$ について述べる．

**例 4.** ($\mathbb{R}^n$ での $\delta(x)$ の定義と表現)

$\delta(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ を

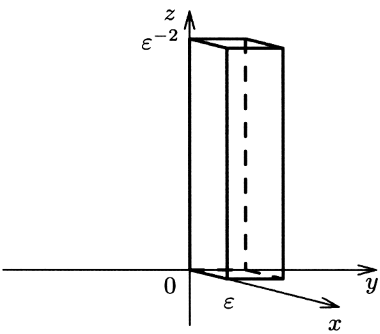
$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0), \quad {}^\forall \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

と定義する．

$g_\varepsilon(x)$ を (2.1.1) のものとし

$$h_\varepsilon(x) = g_\varepsilon(x_1) g_\varepsilon(x_2) \cdots g_\varepsilon(x_n)$$

とすると， $h_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ となる．




$h_\varepsilon(x)$ $n=2$ のグラフ

それは

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi_{x_j}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1$$

と表し

$$\int x_j h_\varepsilon(x) dx = \frac{\varepsilon}{2}$$

を用いるとすぐにわかる．

**例 5.** ($\mathbb{R}^n$ での $r^s$ の定義)

$$r = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

とおいて超関数 $r^s$ を

$$\langle r^s, \varphi \rangle = \int r^s \varphi(x) dx$$

によって定義する．右辺の積分は $\mathrm{Re}\, s > -n$ のときには意味をもつがそうでないときには解析接続によって定義する．詳しくは，ゲリファント = シーロフ [2] 71 頁を見よ．この超関数は重要である．

**例 6.** (二つの超関数の積)

$g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(x)$ の極限である $\delta^2$ は超関数でない．

**証明.** $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi(0) \neq 0$ とすると

$$\langle g_\varepsilon(x)g_\varepsilon(x), \varphi(x) \rangle \to \infty$$

となる．

この例は，二つの超関数の積が，二つの関数の自然な拡張としては定義できないことを示している．

## 2.2. 超関数のフーリエ変換

$\mathcal{S}$ の元 $\varphi(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{\varphi}(\xi)$ は (1.2.1) で

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

と定義された.

超関数の微分を定義するのに双対性を用いたのと同様に超関数のフーリエ変換も双対性を用いて定義する.

フーリエ変換によって $\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}$ に同型に写された（定理 1.5.3 参照）. 以下に示すように $\mathcal{S}'$ の元 $f$ のフーリエ変換 $\widehat{f}$ は（$\mathcal{S}'$ の元 $f$ をフーリエ変換したものを $f$ のフーリエ変換という）やはり緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'$ の元になる. したがって $\mathcal{S}$ の元と対で一つの複素数を与える. その複素数の値は, $\widehat{f}$ が関数であるときの自然な値

$$\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = \int \widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi$$

と一致するように定義する. $\mathcal{S}$ に属する二つの関数に対してはパーセバルの公式

$$(1.2.8)_{再} \quad \int f(x)\overline{g(x)}dx = \int \mathcal{F}[f](\xi)\overline{\mathcal{F}[g](\xi)}d\!\!{}^-\xi$$

が成り立つ.

これからフーリエ変換する前と後との対 $\langle\ ,\ \rangle$ の間の関係は

$$\langle f, \overline{g} \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, \overline{\widehat{g}} \rangle$$

あるいは

$$\langle f, g \rangle = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, \overline{\widehat{\overline{g}}} \rangle$$

あるいは

$$\langle \widehat{f}, \psi \rangle = (2\pi)^{n} \langle f, \overline{\mathcal{F}}[\psi]^{\vee} \rangle$$

となる．ここに

$$f^{\vee}(x) = f(-x)$$

である．

**問 17.** $\psi,\ g \in \mathcal{S}$ とする．

1° $\psi(\xi) = \overline{\overline{\widehat{g}}}(\xi)$ のとき $g(x)$ を $\psi$ で表せ．

2° 上の 1° を用いて上の最後の式を示せ．

上の問 17 を拡張すれば緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'$ の元 $f$ のフーリエ変換 $\widehat{f}$ は次のようになる．

$$\langle \widehat{f}, \psi \rangle = (2\pi)^n \langle f, \varphi^{\vee} \rangle, \quad {}^{\forall}\psi \in \mathcal{S}$$

ただし $\varphi$ は $\psi = \widehat{\varphi}$ となる $\mathcal{S}$ の元である．

超関数 $\widehat{f}$ は超関数 $f$ を用いてこの式で定義されるわけである．しかしこの式はパーセバルの公式に比べると，すっきりしているとはいえない．原因は $\langle\ ,\ \rangle$ の定義が $(\ ,\ )$ の定義と異なっているところにある．そこで $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ のとき，

$$(f, \varphi)_x = \langle f, \overline{\varphi} \rangle$$

と表し，$\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$ のとき，

$$(\widehat{f}, \psi)_\xi = (2\pi)^{-n} \langle \widehat{f}, \overline{\psi} \rangle$$

と表すことにする．そうすると緩増加超関数のフーリエ変換は次のようにすっきりと定義できる．

**定義 2.2.1.** **(緩増加超関数のフーリエ変換)**

$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ を

$$(\widehat{f}, \widehat{\varphi})_\xi = (f, \varphi)_x, \qquad {}^{\forall}\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi) \tag{2.2.1}$$

と定義する．

この式は

$$(2.2.1)' \qquad (\mathcal{F}[f], \psi)_\xi = (f, \overline{\mathcal{F}}[\psi])_x, \qquad {}^\forall\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_\xi)$$

とも表せる．この表し方を見れば双対性を用いていることがすぐにわかる．

第1章でフーリエ変換の重要な性質を述べたが，それは超関数のフーリエ変換の場合にも成り立つ．そのことは後で示すことにして，ここで重要な超関数のフーリエ変換の例をいくつかあげておく．

**例 7.**　**(ディラックのデルタ関数のフーリエ変換,** $S'$ の元としての 1 **のフーリエ変換)** $\mathbb{R}^1$ で考える．

$$\mathcal{F}[\delta] = 1, \quad \mathcal{F}[1] = 2\pi\delta.$$

**証明.**　第1式の証明は

$$\begin{aligned}(\widehat{\delta}, \widehat{\varphi})_\xi &= (\delta, \varphi)_x \\ &= \overline{\varphi(0)} \\ &= \int e^{i0\cdot\xi}\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}d\xi = (1, \widehat{\varphi})_\xi\end{aligned}$$

となる．第2式の証明は

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}[1], \widehat{\varphi})_\xi &= (1, \varphi)_x \\ &= \int e^{-ix\cdot 0}\overline{\varphi(x)}dx \\ &= \overline{\widehat{\varphi}}(0) \\ &= (2\pi\delta, \widehat{\varphi})_\xi\end{aligned}$$

となる．

**問 18.**　$\delta_a(x) = \delta(x-a)$ のフーリエ変換を求めよ．

**例 8.**　**(**$x$ **のフーリエ変換)** $x \notin \mathcal{S}$ であるが $x \in \mathcal{S}'$ となる．したがって超関数の意味でフーリエ変換できる．

$$\mathcal{F}[x] = 2\pi i\delta'$$

となる．

**証明.**　$f(x) = x$ とおく．

$$(\widehat{f}, \overline{\widehat{\varphi}})_\xi = (x, \overline{\varphi})_x = \int x\varphi(x)dx$$

において $\varphi_1(x) = x\varphi(x)$ とおくと $\varphi_1 \in \mathcal{S}$ であり

$$\int \varphi_1(x)dx = \int e^{ix\xi}\varphi_1(x)dx\Big|_{\xi=0}$$

$$= \widehat{\varphi}_1(0)$$

である．ところが (1.2.3) によって

$$\widehat{\varphi}_1(\xi) = i\frac{d}{d\xi}\widehat{\varphi}(\xi)$$

であるから

$$(\widehat{f}, \overline{\widehat{\varphi}})_\xi = i\widehat{\varphi}'(0)$$

すなわち

$$\langle \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = 2\pi i\widehat{\varphi}'(0)$$

となる．これとヘビサイド関数の導関数（例 1 ）とから

$$\widehat{f} = 2\pi i\delta'$$

を得る．

**例 9.** **(ヘビサイド関数のフーリエ変換)**

$$\widehat{Y}(\xi) = \pi\delta - i\,\mathrm{vp}\,\frac{1}{\xi} \tag{2.2.2}$$

となる．

**証明.** 任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し定義によって

$$(\widehat{Y}, \widehat{\varphi})_\xi = (Y, \varphi)_x$$

となる．また，

$$\varphi(x) = \int e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)đ\xi$$

と表される．したがって

$$\text{右辺} = \lim_{M\to\infty}\int_0^M \overline{\varphi}(x)dx$$

$$= \lim_{M\to\infty}\int_0^M \overline{\int e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)đ\xi}\,dx$$

と書ける．最後の積分はフビニの定理によって

$$\begin{aligned}
&\int_0^M \int e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)đ\xi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^M \int_{|\xi|\ge\varepsilon} e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)đ\xi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\ge\varepsilon} \widehat{\varphi}(\xi)\int_0^M e^{ix\xi}đ\xi dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\ge\varepsilon} \widehat{\varphi}(\xi)\frac{e^{iM\xi}-1}{i\xi}đ\xi \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\ge\varepsilon} \left\{\frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{i\xi}e^{iM\xi}+\widehat{\varphi}(0)\frac{e^{iM\xi}-1}{i\xi}-\frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{i\xi}\right\}đ\xi
\end{aligned}$$

とかける．これを $I_1+I_2-I_3$ とする．

$I_1$ について考える．部分積分によって

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{i\xi}e^{iM\xi}đ\xi \\
&= \frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{2\pi i\xi}\frac{e^{iM\xi}}{iM}-\int\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{i\xi}\right)\frac{e^{iM\xi}}{iM}đ\xi
\end{aligned}$$

とかけて，右辺第1項も最後の積分の中も $M\to\infty$ とすると一様に 0 に収束するから $I_1\to 0$ となる．

次に $I_2$ について．

$$\frac{e^{iM\xi}-1}{i\xi}=\frac{\cos M\xi-1}{i\xi}+\frac{\sin M\xi}{\xi}$$

であり，右辺第1項は奇関数で

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin M\xi}{\xi}=\pi$$

であるから

$$I_2=\frac{\pi\widehat{\varphi}(0)}{2\pi}=\pi(\delta,\overline{\widehat{\varphi}})_\xi$$

となる．

最後に $I_3$ について．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\ge\varepsilon}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)-\widehat{\varphi}(0)}{i\xi}đ\xi=\frac{1}{i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|\xi|\ge\varepsilon}\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{\xi}đ\xi=\frac{1}{i}\left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{\xi},\overline{\widehat{\varphi}}\right)_\xi$$

となる．

三つの和 $I_1+I_2-I_3$ の共役複素数をとり，$M\to\infty$ とすると (2.2.2) が得られる．

**問 19.** $a \in \mathbb{R}^1$ とする.

$$\int \frac{\sin ax}{x} dx = \pi \operatorname{sgn} a$$

を示せ.

**例 10.** $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ **のフーリエ変換**を求めよ.

**解.** 定義により $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ に対し

$$\left(\widehat{\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}}, \widehat{\varphi}\right)_\xi = \left(\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}, \varphi\right)_x$$

そして

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \overline{\varphi}(x) dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} \int e^{ix\xi} \overline{\widehat{\varphi}}(\xi) đ\xi dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \int \overline{\widehat{\varphi}}(\xi) \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} e^{ix\xi} dx đ\xi
\end{aligned}$$

となる.

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{1}{x} e^{ix\xi} dx &= \int_{|x| \geq \varepsilon} \left(i \frac{1}{x} \cos x\xi + i \frac{1}{x} \sin x\xi\right) dx \\
&= \int_{|x| \geq \varepsilon} i \frac{1}{x} \sin x\xi dx \\
&\to \pi i \operatorname{sgn} \xi \quad (\varepsilon \to 0 \text{ のとき})
\end{aligned}$$

(すぐ上の問 27 を見よ) よって

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \pi i \int \overline{\widehat{\varphi}}(\xi) \operatorname{sgn} \xi đ\xi \\
&= (\pi i \operatorname{sgn} \xi, \overline{\overline{\widehat{\varphi}}})_\xi \\
&= (-\pi i \operatorname{sgn} \xi, \widehat{\varphi})_\xi
\end{aligned}$$

これから

$$\widehat{\mathrm{vp}\,\frac{1}{x}} = \pi i \operatorname{sgn} \xi$$

となる.

**問 20.** $(\pi i \operatorname{sgn} \xi, \overline{\overline{\widehat{\varphi}}})_\xi = (-\pi i \operatorname{sgn} \xi, \widehat{\varphi})_\xi$

を示せ.

第1章では急減少関数の空間 $\mathcal{S}$ に属する $f$ のフーリエ変換の基本的性質として (1.2.2) ～ (1.2.8) を示した．同様の性質が緩増加超関数 $f \in \mathcal{S}'$ についても成立することを以下に示す．ただし，$\mathcal{S}'$ の二つの元の積は一般には定義できないので (1.2.8) に対応する性質については述べないことにする．

**定理 2.2.2.** **(超関数のフーリエ変換の性質)**

$f \in \mathcal{S}'$ とすると $\widehat{f} \in \mathcal{S}'$ である．そして

**1°** 微分したもののフーリエ変換は，フーリエ変換に $\xi$ を掛けたものに等しい．すなわち

$$\mathcal{F}[D_x^\alpha f] = \xi^\alpha \widehat{f}$$

となる．ここに，左辺の微分は超関数の意味での微分であり，右辺は $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ に対し

$$(\xi^\alpha f, \widehat{\varphi})_\xi = (f, \xi^\alpha \widehat{\varphi})_\xi$$

によって定義される超関数である．

**2°** フーリエ変換の微分は，$-x$ を掛けたもののフーリエ変換に等しい．すなわち

$$D_\xi^\alpha \mathcal{F}[f] = \mathcal{F}[(-x)^\alpha f]$$

となる．ここに $(-x)^\alpha f$ は

$$((-x)^\alpha f, \varphi)_x = (f, (-x)^\alpha \varphi)_x$$

によって定義される超関数である．

**3°** 平行移動については

$$T(h)\widehat{f} = \mathcal{F}[e^{ih\cdot x} f]$$

が成り立つ．$T(h)$ は (2.1.4) で定義される平行移動である．

**4°** 相似変換については

$$\mathcal{F}[f(ax)](\xi) = a^{-n}\widehat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

が成り立つ．

**5°** $$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$$
$$\overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$$

はともに 1 対 1 上への連続写像であって，

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}} = I \quad \text{on } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi) \quad と \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I \quad \text{on } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$$

とが成り立つ．すなわち

$$\mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}[f] = f, \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}[\widehat{f}] = \widehat{f}$$

が成り立つ．ここに，超関数 $\widehat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ の逆フーリエ変換 $\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}]$ は

(2.2.3) $$(\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}], \varphi)_x = (\widehat{f}, \mathcal{F}[\varphi])_\xi \quad すべての\ \varphi \in \mathcal{S}\ に対して$$

によって定義する．

**証明．** 定義式 (2.2.1) に定理 1.2.2 の結果をあわせると証明できる．5° については定理 1.5.3 と定義 2.1.1 の 2°を用いる．

**問 21．** $\mathcal{F}[\delta] = 1$ と $Y' = \delta$ と定理 2.2.2 を用いて

$$1 = \mathcal{F}[\delta] = \mathcal{F}[Y'] = i\mathcal{F}[D_x Y] = i\xi\mathcal{F}[Y]$$

これから

$$\mathcal{F}[Y] = -\frac{i}{\xi}$$

となるとする計算は，どこが誤りか．例 9 （ヘビサイド関数のフーリエ変換）と比べよ．超関数として $\xi$ で両辺を割るとはどういうことか．

**問 22．** 次の超関数のフーリエ変換を求めよ．

1° $x^m$

2° $x_+^m$

3° $|x|^m \operatorname{sgn} x$

4° $(x + i\tau)^{-1}, \qquad \tau > 0.$

**定義 2.2.3．** （特異台）

$u \in \mathcal{D}'$ とする．$u$ の**特異台** (singular support) を

(2.2.4) $$\text{sing supp } u = \{x; u|_U\ が\ C^\infty となるような開集合が存在\ \}^c$$

と定義する．ここに $E^c$ は $E$ の補集合を表し，$u|_U$ が $C^\infty$ となるとは

$$\varphi(x) \in \mathcal{S}, \quad \operatorname{supp}\varphi \subset U \text{ ならば } \quad \langle u, \varphi\rangle = \int \psi(x)\varphi(x)dx$$

となる $C^\infty$ 関数 $\psi$ が存在することをいう.

**問 23.** 特異台を求めよ.

1° $\delta(x)$

2° $Y(x)$.

**問 24.** $f \in \mathcal{S}'$ を次の式で定義されるものとする. $\widehat{f}$ を求めよ. sing supp $f$ を求めよ.

1° $$f(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

2° $f(x,y) = |x-y|$.

**例 11.** **(ペイリー=ウィーナー=シュワルツの定理)** $f \in \mathcal{S}'$ の台が一辺 $C$ の立方体に含まれる必要十分条件は $\widehat{f}(\zeta)$ が整関数であって $\zeta = \xi + i\eta$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ とするとき

$$|\widehat{f}(\zeta)| \le M(1+|\zeta|)^N e^{C\eta}$$

が成り立つ $M$ と $N$ が存在することである. ここに

$$\widehat{f}(\zeta) = \int e^{-ix\cdot\zeta} f(x)dx, \qquad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

である.

**証明.** 有名なペイリー=ウィーナー=シュワルツの定理である. 証明はシュワルツ [2] 264 頁あるいは垣田 [1] 74 頁を見よ.

$f(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は $f(x)$ のどのような性質を表現しているのか. シュワルツ [1] 186 頁には簡単に

> $f(x)$ が何回も微分可能（ただし導関数は可積分）であればあるほどそのフーリエ変換は無限遠においてはやく減少する;
>
> $f(x)$ が無限遠においてはやく減少すればするほどそのフーリエ変換は何回も微分可能（導関数は有界）である

と述べられているが，これ以外にも重要な性質をいろいろ与えてくれる．詳しくは，フーリエ解析の応用についての教科書を参照されたい．

**例 12.** 緩増加関数のフーリエ変換は急減少超関数である．

**解.** $f \in \mathcal{M}$ ならば $f \in \mathcal{S}'$ であるから超関数としてフーリエ変換すると $\widehat{f} \in \mathcal{S}'$ となるが，急減少であるという意味は，任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\widehat{f} * \varphi \in \mathcal{S}$ となるということである．証明は垣田［1］81 頁 定理 4-4 を見よ．

第 2.1 節と 第 2.2 節で簡単に超関数について述べたが，超関数の理論は偏微分方程式の研究に重要なだけでなく，数学の他の分野，物理学などにおいても重要である．そして，ここに述べたことだけでは極めて不十分である．シュワルツ［2］，Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E.［1］，垣田［1］などによってさらに学ぶことを強く勧める．

ここに波面集合 (wave front set) について述べるべきであるが，本書では述べなかった．これについては，熊ノ郷［4］がわかりやすい．

## 2.3. 擬微分作用素の定義域の拡張

この節では第 1 章で定義した擬微分作用素の定義域を緩増加超関数の空間 $\mathcal{S}'$ へ拡張する．第 1 章では擬微分作用素が作用する関数は急減少関数にかぎってきた．そのときに予告したように，ここで作用させうる対象を緩増加超関数にまで拡張する．こうすることによって，擬微分作用素の理論が強力なものになる．そのことは次の第 2.4 節で示す．

まず，擬微分作用素 $P \in \mathrm{S}^m$ の形式的随伴作用素 $P^*$ を定義する．

**定義 2.3.1.** (形式的随伴作用素)

$P = p(x, D_x) \in \mathrm{S}^m$ とする．任意の $u, v \in \mathcal{S}$ に対し

$$(Pu, v) = (u, P^*v)$$

となる $P^*$ を $P$ の**形式的随伴作用素** (formal adjoint) という．

ここに内積 ( , ) は次の式で定義されるものである．

$$(u, v) = \int u(x)\overline{v(x)}dx$$

以下，この $P^*$ のシンボルを求め，それが $\mathrm{S}^m$ に入ることを示す．まず，微分多項式の場合について考える．単項式から始める．部分積分の公式によって

$$(D_x^\alpha u, v) = (u, D_x^\alpha v) \tag{2.3.1}$$

が成り立つ．なぜならば

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \int (D_x^\alpha u(x))\overline{v(x)}dx \\
&= \int (-i)^{|\alpha|}(\partial_x^\alpha u(x))\overline{v(x)}dx \\
&= \int i^{|\alpha|}u(x)\partial_x^\alpha \overline{v(x)}dx \\
&= \int u(x)\overline{D_x^\alpha v(x)}dx = \text{右辺}
\end{aligned}$$

となるからである．また

$$\int a(x)u(x)\overline{v(x)}dx = \int u(x)\overline{\overline{a(x)}v(x)}dx$$

である．

$P = a(x)D_x^\beta$ とし $\sigma(P) = p(x,\xi)$ とする．すなわち $p(x,\xi) = a(x)\xi^\beta$ である．そして

$$p_\alpha(x,\xi) = p_{(\alpha)}^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha p(x,\xi)$$

とおく．4 頁の $\binom{\alpha}{\beta}$ の定義から，任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対して

$$p_\alpha(x,\xi) = \alpha!\binom{\beta}{\alpha}D_x^\alpha a(x)\xi^{\beta-\alpha}$$

と表せる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p_\alpha(x,D_x)}v(x) &= (-1)^{|\alpha|}\binom{\beta}{\alpha}\overline{D_x^\alpha a(x)}D_x^{\beta-\alpha}v(x)\\ &= \binom{\beta}{\alpha}D_x^\alpha\overline{a(x)}D_x^{\beta-\alpha}v(x)\end{aligned}$$

が任意の $\alpha$ に対して成り立つ．$\beta$ を一つ与えるとそれに対し $\binom{\beta}{\alpha} \neq 0$ となる $\alpha$ は有限個である．したがってすべての $\alpha$ について加えることができる．ライプニッツの公式 (1.1.3) を用いると

$$\sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p_\alpha(x,D_x)}v(x) = D_x^\beta(\overline{a(x)}v(x))$$

となる．したがって

$$\sigma(P^*) = p^*(x,\xi) = \sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p_\alpha(x,\xi)}$$

とおくと

$$(Pu,v) = (u,P^*v)$$

が成り立つ．いまのこの議論は単項式の場合でなくてもそのまま成り立つことがわかるから次の結論を得る．$p(x,D_x)$ を微分多項式とするとその形式的随伴

作用素のシンボル $p^*(x,\xi)$ は

$$p^*(x,\xi)=\sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p_\alpha(x,\xi)} \tag{2.3.2}$$

で与えられる．有限和であることに注意せよ．特に実定係数の微分多項式の形式的随伴作用素はそれ自身に一致する．すなわち，形式的自己随伴である．

**問 25．** 1° 第 1 章の問 17 の結果を用いると，公式 (2.3.2) は

$$p^*(x,\xi)=\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta}\overline{p(x+y,\xi+\eta)}dy đ\eta \tag{2.3.2$'$}$$

と表される．これを証明せよ．

2°　$p(x,\xi)=\xi^2+x^2$ であるとき $p^*(x,\xi)$ を求めよ．

上の結果を擬微分作用素に拡張する．微分作用素の形式的随伴作用素はまず係数の共役複素数を掛け，それから微分する（$D_x$ の意味で微分するのは (2.3.1) からわかるように部分積分しても同じ形をしている），そしてライプニッツの公式を用いて展開して普通の微分多項式に直すことによって得られた．擬微分作用素の場合も考え方は同じである．

$x$ について“掛ける”作用をまずして，次に“微分する”という作用素 $Q$ のシンボルを

$$q(x',\xi)$$

で表すことにする．$Q$ は $v(x)\in\mathcal{S}$ に対し $q(x',\xi)$ の $x'$ の部分をまず掛け，それから $\xi$ の部分について微分するわけである．式で表すと，

$$Qv(x)=\int e^{ix\cdot\xi}\left\{\int e^{-ix\cdot\xi}q(x',\xi)v(x')dx'\right\}đ\xi$$

である．

$q(x',\xi)$ が $(x',\xi)$ の関数として $\mathrm{S}^m$ に入るとする．

$$p(x,\xi)=\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-i\eta\cdot y}q(\xi+\eta,x+y)đyđ\eta \tag{2.3.3}$$

とおくと $p(x,\xi)\in \mathrm{S}^m$ であり $Q=p(x,D_x)$ となる．これは積公式の定理（定理 1.3.2）において $p_1$ は $x$ に無関係，$p_2$ は $\xi$ に無関係であるとしたものと同様である．

この (2.3.3) は，$x$ についての掛算と微分の順序を逆にする公式を与えている．この $q(x',\xi)$ を $p(x,\xi)$ の**転置シンボル**と呼ぶ．上の議論を用いると擬微分作用素の形式的随伴作用素が容易に求められる．

**定理 2.3.2.** **(形式的随伴作用素のシンボル，その漸近展開)**

$p(x,\xi)\in \mathrm{S}^m$ をシンボルとする擬微分作用素 $P$ の形式的随伴作用素 $P^*$ はやはり擬微分作用素であり，$\overline{p(x',\xi)}$ をシンボルとする．したがってその普通の意味のシンボルを $p^*(x,\xi)$ とすると $p^*(x,\xi)\in \mathrm{S}^m$ であり

$$p^*(x,\xi)=\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta}\overline{p(x+y,\xi+\eta)}dyđ\eta \tag{2.3.4}$$

と表される．そして

$$p^*(x,\xi)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}\overline{p^{(\alpha)}_{(\alpha)}(x,\xi)} \tag{2.3.5}$$

と漸近展開される．

$p(x,\xi)$ が微分多項式でないときや，係数が $x$ の多項式でないときには，上の右辺の級数は一般には無限和である．そして，一般には収束しない．

**証明.** $u(x),v(x)\in\mathcal{S}$ とする．

$$\begin{aligned}(Pu,v)&=\int\left\{\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)đ\xi\overline{v(x)}\right\}dx\\&=\int\widehat{u}(\xi)\left\{\int e^{ix\cdot\xi}p(x,\xi)\overline{v(x)}dx\right\}đ\xi\\&=\int\widehat{u}(\xi)\left\{\overline{\int e^{-ix\cdot\xi}\overline{p(x,\xi)}v(x)dx}\right\}đ\xi\end{aligned}$$

となるから，(2.3.3) によって (2.3.4) が得られる．

漸近展開 (2.3.5) は積のシンボルの漸近展開公式 (1.3.6) の証明と全く同じである.

いまつくった形式的随伴作用素を用いて擬微分作用素の定義域を $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}'$ へ拡張することができる.

**定義 2.3.3.** **(超関数に作用する擬微分作用素)**

$P \in \mathrm{S}^m$ とするとき

$$P : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$$

を $u \in \mathcal{S}'$ に対し

$$(2.3.6) \qquad (Pu, \varphi) = (u, P^*\varphi), \quad {}^\forall\varphi \in \mathcal{S}$$

によって定義する.

**注意.** $u \in \mathcal{S}'$, $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$(u, \varphi) = \langle u, \overline{\varphi} \rangle$$

これで, 簡単に定義域の拡張ができたのであるが, $Pu \in \mathcal{S}'$ が成り立っているか, $P : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ の拡張になっているか, $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ として連続な写像になっているか, 拡張は一意かなどを確かめなければならない.

**定理 2.3.4.** **($\mathcal{S}'$ 上の擬微分作用素の基本性質)**

上の (2.3.6) 式によって定義される $P$ は

**1°** $P : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ として連続である.

**2°** $P : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ の拡張になっている.

**3°** この拡張は一意である.

**証明.** 緩増加超関数空間 $\mathcal{S}'$ 上の作用素が連続であるとは,

$$f_j \to f \text{ in } \mathcal{S}' \Rightarrow Pf_j \to Pf \text{ in } \mathcal{S}'$$

ということであるから, 1°の証明は, 次のようにできる. $f_j \to f$ in $\mathcal{S}'$ は

$$(f_j, \varphi) \to (f, \varphi) \quad (\text{すべての } \varphi \in \mathcal{S} \text{ に対して})$$

のことであるから,

$$(f_j, P^*\varphi) \ \to \ (f, P^*\varphi) \quad (\text{すべての } \varphi \in \mathcal{S} \text{ に対して})$$

が成り立つ. (2.3.6) によってこれは

$$(Pf_j, \varphi) \ \to \ (Pf, \varphi) \quad (\text{すべての } \varphi \in \mathcal{S} \text{ に対して})$$

となる. この式は $Pf_j \to Pf \quad (\mathcal{S}'$ において) を示している.

次に 2° を証明する. これは (2.3.6) が $u \in \mathcal{S}$ に対しても成り立つことを示せばよい. しかし, それは $P^*$ の定義そのものである.

最後に 3° を証明する. $P_1, P_2 \in \mathrm{S}^\infty$ とする.

$$P_1 f = P_2 f \quad (\mathcal{S} \text{ の元として}) \ \Rightarrow \ P_1 f = P_2 f \quad (\mathcal{S}' \text{ の元として})$$

を示せばよい. $f \in \mathcal{S}'$ とする. $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{S}$, $\varphi_j \to f \quad \mathcal{S}'$ の中で となる $\{\varphi_j\}$ が存在する (例 2).

$P_1\varphi_j = P_2\varphi_j$ かつ $P_1, P_2$ は連続であるから

$$(P_1 - P_2)f = \lim_{j\to\infty} (P_1 - P_2)\varphi_j = 0$$

となり, $\mathcal{S}'$ においても $P_1 = P_2$ となる.

**問 26.** $p \in \mathrm{S}^{-\infty}$, $u \in \mathcal{E}'$ のとき $Pu \in \mathcal{E}$ となることを示せ. さらに $Pu \in \dot{\mathcal{B}}$ となることを示せ. ここに

$$\dot{\mathcal{B}} = \{u \in \mathcal{B};\ \lim_{|x|\to\infty} D_x^\alpha u(x) = 0, \quad {}^\forall\alpha \geq 0\}$$

である.

**例 13.** $\mathcal{F}[\langle D_x \rangle \delta] = \langle \xi \rangle$ を示せ.

**解.** 例 7 と定理 2.2.2 の 2°と $\langle \xi \rangle$ の定義から直ちに得られる.

**問 27.** $(-\triangle + 1)u = \delta$ となる $u$ を求めよ.

**問 28.** $f, g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^1)$ とし $c > 0$ とする.

$$u = f(ct - x) + g(ct + x)$$

とすると

$$(\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = 0$$

を満たすことを示せ．ここに $f(ct-x)\in\mathcal{S}'$ は，任意の $\varphi\in\mathcal{S}$ に対し

$$\langle f(ct-x),\varphi(x)\rangle=\langle f,\varphi(ct-x)\rangle$$

で定義される超関数である．$g(ct+x)$ も同様．

## 2.4. 基本解，初期値問題の基本解

擬微分作用素の理論が偏微分方程式の解法にどう用いられるかを，簡単な例によって説明する．本質的に擬微分作用素を用いる例は第 3 章で述べるが，この節では擬微分作用素を考えなければならないことの必然性と，その定義を $\mathcal{S}'$ まで拡張しなければならないことを示す．

この節で例として扱う古典的な偏微分方程式については，応用上の必要からもこれまで色々な解法が工夫されてきた．古典的な偏微分方程式としてはポテンシャルの方程式，熱方程式，波の方程式などがある．波の方程式を典型的例として含む双曲型方程式を扱うためには擬微分作用素の理論だけでは不十分でこれをさらに拡張したフーリエ積分作用素の理論を必要とする．ここでは，ポテンシャルの方程式に現れるラプラシアンと熱の方程式について述べる．その前に超関数と普通の関数とのたたみ込み（合成積，convolution ）について述べる．　第 2.1 節では超関数の定義，超関数の微分について述べた．第 2.2 節では超関数のフーリエ変換について述べた．これらを用いて擬微分作用素を超関数に作用させることができることを第 2.3 節で述べた．これらの節では第 1 章とほぼ平行に議論が進められたのである．しかし，読者は気づかれたことと思うが，超関数の積については何も述べられていない．その理由は，“任意の二つの超関数の積というものは定義できない” ということによる（第 2.1 節の最後の例を見よ）．$\mathcal{S}'$ の元と $\mathcal{S}$ （緩増加関数全体の空間）の元とのたたみ込みは古典的基本解を理解するのに必要である．

**定義 2.4.1.　（超関数のたたみ込み）**

**1°** $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$ のとき，たたみ込み $u * \varphi$ を

$$\langle u * \varphi, \psi \rangle = \langle u, \varphi^\vee * \psi \rangle, \quad {}^\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$$

によって定義する．ここに $\varphi^\vee(x) = \varphi(-x)$ である．

**2°** $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n_\xi)$ の元を $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_\xi)$ の元とみてフーリエ変換したものの全体を $\mathcal{M}^\wedge(\mathbb{R}^n_x)$ で表すことにする.

$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n_x)$, $v \in \mathcal{M}^\wedge(\mathbb{R}^n_x)$ のとき，たたみ込み $u * v$ を

$$\langle u * v, \psi \rangle = \langle u, v^\vee * \psi \rangle, \quad {}^\forall \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n_x)$$

によって定義する.

$\varphi^\vee * \psi \in \mathcal{S}$ となるから 1° の定義ができることがわかる．また，$v \in \mathcal{M}^\wedge$ なら $v^\vee \in \mathcal{M}^\wedge$ であるから，第 2.2 節の最後の例によって $v^\vee * \psi \in \mathcal{S}$ となる．これから 2° が定義できることがわかる．$(x, \xi) \in \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$ とし $t \in \mathbb{R}$ とする.

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \qquad a_\alpha(x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_x),$$

$$p(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le 2} a_\alpha(t, x) \xi^\alpha, \qquad a_\alpha(t, x) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^n_x)$$

とする.

$$p_0(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \qquad p_0(t, x, \xi) = \sum_{|\alpha| = 2} a_\alpha(t, x) \xi^\alpha$$

をそれぞれ $p(x, \xi)$, $p(t, x, \xi)$ の主部と呼ぶ．主部の係数は実数値であるとする.

**定義 2.4.2.** (楕円型，放物型，基本解，古典的基本解)

**1°** ある定数 $c > 0$ に対して $p(x, \xi)$ の主シンボル $p_0(x, \xi)$ が,

$$p_0(x, \xi) \ge c|\xi|^2$$

となるとき，$p(x, \xi)$ は**楕円型**であるという.

任意の $t$ に対して $p(t, x, \xi)$ が楕円型であるとき,

$$L = \partial_t + p(t, x, \xi) \tag{2.4.1}$$

を**放物型作用素**と呼ぶ.

**2°** $p(x, \xi)$ を (2.4.1) のものとし $P = p(x, \xi)$ とする.

$$PE = I, \qquad I \text{ は恒等写像}$$

となる擬微分作用素 $E = e(x, D_x)$ が存在するならば，それを $P$ の**基本解**とい

う．$e(x,\xi)$ は基本解のシンボルと呼ばねばならないが，これも基本解と呼ぶ．

$P$ の係数が $x$ に関係しない場合，

$$PK = \delta, \qquad \delta \text{ はディラックのデルタ関数}$$

となる“関数” $K$ を $P$ の**古典的基本解**と呼ぶ．

上に定義した楕円型は，詳しくは 2 階強楕円型と呼ばねばならないものである．上の放物型の定義も極めて条件としては強いかぎられた定義である．楕円型の定義も放物型の定義も実は数多くある．高階の方程式に対しても定義される．偏微分方程式の分類については 第 3.1 節でさらに少し述べることにする．

任意の $p(x,\xi)$ に対し基本解が存在するわけではない．基本解と呼ばれるわけは，それが求められたら

$$Pu = f, \qquad f \in \mathcal{S}$$

の解は $Ef$ で与えられるからである．

古典的基本解は，積分

$$u(x) = \int K(x-y)f(y)dy$$

が存在し $P$ と積分とが可換であれば

$$\begin{aligned} Pu(x) &= P\int K(x-y)f(y)dy \\ &= \int PK(x-y)f(y)dy \\ &= \int \delta(x-y)f(y)dy = f(x) \end{aligned}$$

となるから，こう呼ばれるわけである．

$e(\xi)$ と $K(x)$ は

$$K(x) = \overline{\mathcal{F}}[e](x)$$

の関係になっている．これは $p(\xi)e(\xi) = 1$ の両辺を逆フーリエ変換すれば得ら

れる．また $K(x)$ を

$$e(\xi)=\widehat{K}(\xi)$$

となる "関数" とする．$f(x)\in\mathcal{S}$ に対し

$$\begin{aligned}\widehat{K}(D_x)f(x)&=\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{K}(\xi)\widehat{f}(\xi)đ\xi\\&=\overline{\mathcal{F}}[\widehat{K}\widehat{f}]\\&=\overline{\mathcal{F}}[\widehat{K}]*\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}]\\&=K*f\\&=\int K(x-y)f(y)dy\end{aligned}$$

となることからもこれらの定義の間の関係がわかる．しかし，$K(x)=\overline{\mathcal{F}}[1/p]$ は一般には関数ではないし，$1/p(\xi)$ も擬微分作用素のシンボルにはならない．

ここで楕円型作用素の典型的例であるラプラシアン

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

の古典的基本解と，擬微分作用素との関係および放物型作用素の典型的例である熱作用素

$$L=\partial_t-\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) \tag{2.4.2}$$

の古典的基本解と初期値問題の基本解などについて述べる．

**定理 2.4.3.** **(ラプラシアンの古典的基本解)**

$P_0=-\triangle$ とする．$\sigma(P_0)=\xi_1^2+\xi_2^2+\cdots+\xi_n^2$ である．$P_0$ の古典的基本解 $K_0(x)$ は，

$n=1$ のときは

$$K_0=-x_+$$

($x_+$ は問 16 の 4° で $m=1$ としたもの)

$n=2$ のときは

$$K_0 = -\frac{1}{2\pi} \log \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$n \geq 3$ のときは

$$K_0 = -\frac{1}{(n-2)\sigma_n} \frac{1}{r^{n-2}}$$

ただし，$\sigma_n = \dfrac{4\pi^{n/2}}{(n-2)\Gamma\big((n-2)/2\big)}$ （＝半径 1 の $n$ 次元の超球面の面積）

となる．

**証明．** $n=1$ のとき．

$$\langle x_+, \varphi \rangle = \int_0^\infty x\varphi(x)dx,$$

$$\langle \frac{d}{dx} x_+, \varphi \rangle = -\int_0^\infty x\varphi'(x)dx = \int_0^\infty \varphi(x)dx$$

であるから

$$\frac{d}{dx} x_+ = Y(x)$$

また

$$\frac{d}{dx} Y(x) = \delta(x)$$

は例 1 で示した．ゆえに，

$$\frac{d^2}{dx^2} x_+ = \delta(x)$$

$n=2$ のとき ( $\langle \triangle \log r, \varphi \rangle = 2\pi\varphi(0)$ の証明) .

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とおくと

$$\langle \triangle \log r, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to +0} \iint_{r>\varepsilon} \log r \triangle \varphi dxdy$$

は

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^\infty r \log r \left( \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \right) \varphi dr$$

となる．

よって

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} r\log r\partial_r^2\varphi dr = [r\log r\partial_r\varphi]_{\varepsilon}^{\infty} - \int_{\varepsilon}^{\infty}(\log r+1)\partial_r\varphi dr$$

と

$$\lim_{\varepsilon\to+0}[r\log r\partial_r\varphi]_{\varepsilon}^{\infty} = 0$$

とを用いると

$$\begin{aligned}\langle\triangle\log r,\varphi\rangle &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi} d\theta\int_{\varepsilon}^{\infty}\partial_r dr\\ &= -\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}\varphi(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta\\ &= 2\pi\varphi(0,0)\end{aligned}$$

となる.

$n=3$ のとき.

$$-\triangle K_0 = \delta(x_1,x_2,x_3)$$

の両辺をフーリエ変換すると

$$(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\widehat{K}_0 = 1$$

したがって

$$\begin{aligned}K_0 &= \overline{\mathcal{F}}\left[\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\right]\\ &= (2\pi)^{-3}\int e^{ix\cdot\xi}\frac{1}{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\end{aligned}$$

となる. ここで $|\xi|=\rho$, $|x|=r$ とし, $\xi$ と $x$ とのなす角を $\theta$ とすると, $0\le\omega<2\pi$ である $\omega$ を用いて

$$\begin{cases}\xi_1 = \rho\sin\theta\cos\omega,\\ \xi_2 = \rho\sin\theta\sin\omega,\\ \xi_3 = \rho\cos\theta\end{cases}$$

と表されるから $x\cdot\xi = r\rho\cos\omega$ となり,

$$K_0 = (2\pi)^{-3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{ir\rho\cos\theta}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\theta d\rho d\omega d\theta$$
$$= -(2\pi)^{-3}2\pi\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} e^{ir\rho t}d\rho dt$$
$$= -(2\pi)^{-3}4\pi\frac{1}{r}\int_0^{\infty}\frac{\sin r\rho}{\rho}d\rho$$
$$= -\frac{1}{4\pi r}$$

となる．

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin r\rho}{\rho}d\rho = \int_0^{\infty}\frac{\sin\rho}{\rho}d\rho = \frac{\pi}{2}$$

については例えば高木［1］223 頁を見よ．

**問 29.** $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とする．

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{\log r}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\varphi dr = 0$$

を示せ．

**問 30.** $u = K_0 * f$ とおくと $Pu = f$ となることを示せ．

以下 $x = (x_1, x_2, x_3)$ とする．(2.4.2) が熱の流れを表す作用素であることについては 第 3.2 節で詳しく述べることにする．$L$ についての初期値問題（コーシー問題とも呼ばれる）は

$$(2.4.3)\qquad \begin{cases} Lu = f, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

となる $u(t,x)$ を求めよという問題である．この問題に対しては次に定義される初期値問題の基本解と呼ばれる擬微分作用素のシンボルが重要である．

$$(2.4.4)\qquad \begin{cases} Le(t,s,D_x) = 0, & \text{(作用素としての積)} \\ e(s,s,D_x) = I \end{cases}$$

を満たすシンボルを**初期値問題の基本解**と呼ぶ．

ここで $t, s$ はパラメータである．どのようにパラメータに依存するシンボルであるかなどの詳しいことは次の章で述べることにする．都合のよい $e(t,s,\xi)$

が存在するということを仮定すれば次のことが成り立つ．

$$u(t,x) = e(t,0,D_x)u_0(x) + \int_0^t e(t,\tau,D_x)f(\tau,x)d\tau$$

とすると，$u(t,x)$ は (2.4.3) の解である．これは，形式的には

$$u(0,x) = e(0,0,D_x)u_0(x) + \int_0^0 e(t,\tau,D_x)f(\tau,x)d\tau = Iu_0(x)$$

と

$$Lu(t,x) = e(t,t,D_x)f(t,x) + \int_0^t Le(t,\tau,D_x)f(\tau,x)d\tau = f(t,x)$$

からわかる．

**定理 2.4.4.** (熱方程式の初期値問題の基本解，古典的基本解)

(2.4.3) で与えられる**熱方程式の初期値問題の基本解**は

$$e(t,s,\xi) = \exp[-(t-s)|\xi|^2] \tag{2.4.5}$$

となる．ここに $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ である．

$e(t,s,\xi)$ の逆フーリエ変換を $U(t,s,x)$ すなわち

$$U(t,s,x) = \left(2\sqrt{\pi(t-s)}\right)^{-3} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4(t-s)}\right]$$

とし $Y(t)$ をヘビサイドの関数とすると，**熱方程式の古典的基本解**は

$$K(t,x) = Y(t)U(t,0,x) = Y(t)\left(2\sqrt{\pi}t\right)^{-3} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right]$$

で与えられる．

**証明.** (2.4.4) はフーリエ変換すると

$$\begin{cases} \partial_t e(t,s,\xi) + |\xi|^2 e(t,s,\xi) = 0, \\ e(s,s,\xi) = 1 \end{cases}$$

と表されるから，初期値問題 (2.4.3) の基本解は (2.4.5) で与えられる．これを $\xi$ について逆フーリエ変換すると

$$U(t,s,x) = (2\sqrt{\pi(t-s)})^{-3} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4(t-s)}\right]$$

となる．これは第 1 章 例 5 の 2° と定理 1.2.2 の 4° とから得られる．

これとヘビサイド関数 $Y$ を用いて

$$K(t,x) = Y(t)U(t,0,x) = Y(t)\left(2\sqrt{\pi}t\right)^{-3}\exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right]$$

とおくと

$$LK = \delta$$

となる．したがってこの $K$ が $L$ の古典的基本解である．

$e(t,s,\xi)$ は $L$ の初期値問題の基本解，$K(t,s)$ は $Lu = f$ の古典的基本解，となるわけであるが

$$\frac{1}{i\tau + \xi^2} \notin \mathrm{S}^{\infty}$$

であるから $Lu = f$ の擬微分作用素としての基本解は存在しない．

**問 31．** 初期値問題 (2.4.3) の解は

$$u(t,x) = E(t,0)u_0(x) + \int_0^t E(t,\tau)f(\tau,x)d\tau \tag{2.4.6}$$

と表されることを示せ．ここに $E(t,s)$ は (2.4.5) の $e(t,s,\xi)$ をシンボルにする擬微分作用素である．

**問 32．** 古典的基本解を用いて得られる

$$u(t,x) = \iint K(t-s,x-y)f(s,y)dsdy$$

は (2.4.6) において $u_0 \equiv 0$ としたものに等しいことを示せ．

問 32 の結果から

$$K * f = u \quad ならば \quad Lu = f$$

となることがわかる．しかし $Lv = 0$ となる $v$ に対し $L(u+v) = f$ となる．そして，このような $v$ は $u_0(x)$ を $E(t,0)u_0(x)$ が定義できるように選んで

$$v(t,x) = E(t,0)u_0(x)$$

とおけば得られる．このことは，$Lu = f$ の解の一つが与えられるにすぎないことを示している．しかし，

$Lu = 0$ の解がすべて得られ，$Lu = f$ の解が

一つ得られたら，$Lu = f$ の解はすべて得られる

が成り立つから，一つの解が得られるということは重要なことである．

**問 33.**　**誤差関数** $\operatorname{erf} x$, $x \in \mathbb{R}^1$ は次の式で定義される関数である．

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-w^2} dw$$

これを用いると (2.4.3) で $x \in \mathbb{R}^1$ とし

$$f(x) \equiv 0, \quad u_0(x) = \begin{cases} C_0, & |x| < 1 \text{ のとき}, \\ 0, & |x| > 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

としたものの解は

$$u(t,x) = \frac{C_0}{2}\left(\operatorname{erf}\frac{1-x}{2\sqrt{t}} + \operatorname{erf}\frac{1+x}{2\sqrt{t}}\right), \quad t > 0$$

と表されることを示せ．

**問 34.**　$K_0$ を定理 2.4.3 のものとするとき $u = K_0 * f$ とおくと

$$P_0 u = f$$

の解になることを $n = 1$ の場合について直接的計算によって示せ．

ラプラシアンの古典的基本解も熱の方程式の古典的基本解も，超関数のたたみ込みと考えられる．そして，そのフーリエ変換は元の作用素のシンボルを用いて表される．元の作用素のシンボルの逆数は擬微分作用素のシンボルにはならないけれども，古典的基本解とはフーリエ変換を通じて関連しているわけである．

## 2.5. ソボレフ空間と擬微分作用素

いままでは積分については，リーマン積分であるかルベーグ積分であるかについては，はっきりとさせずに，ほぼ，リーマン積分であるかのように扱ってきた．この節ではソボレフ空間について述べるが，その準備として**ルベーグ積分**の定義と基礎的な定理を述べる．(定理の証明は伊藤 [1] あるいは溝畑 [2] を参照されたい．) ルベーグ積分の理論の厳密性を理解するのは容易でないが，極めて自然な定義であることは下に述べたことからでもわかる．

**定義*** (区間，関数，有界関数．溝畑 [2] 2 頁)

$$I = \{x; \quad a_j < x_j < b_j \text{ または } a_j \le x_j \le b_j$$
$$\text{または } a_j < x_j \le b_j \text{ または } a_j \le x_j < b_j, \qquad j = 1, 2, \cdots, n\}$$

を区間と呼ぶ．

$$\mathring{I} = \{x; \quad a_j < x_j < b_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n\}$$

を区間 $I$ の内部と呼ぶ．

区間 $I$ の体積を

$$|I| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$

と定義する．

区間 $I$ のすべての数 $x$ に対して一意的にある数 $y$ が対応しているとき，$y = f(x)$ とかき，関数 $f(x)$ が定義されているという．

すべての $x \in I$ に対し $|f(x)| < M$ となる定数 $M$ が存在するとき $f(x)$ は有界関数であるという．

以下，しばらくは $n = 1$ と思えばわかりやすい．このときは $I$ は開区間，閉区間，左開区間，右開区間のいずれかである．

**定義*** (階段関数．伊藤 [1] 60 頁，溝畑 [2] 54 頁)

$I$ で定義された関数 $\varphi(x)$ が階段関数 (step function) であるとは，$I$ を重なり合わない適当な区間 $I_k$ ($k \neq l$ ならば $\mathring{I}_k \cap \mathring{I}_l = \emptyset$) の和集合として表したとき，各部分区間

$\mathring{I}_k$ の内部では $\varphi(x)$ は定数 $c_k$ になっているときをいう．そして

$$\int_I \varphi(x)dx = \sum_k c_k|I_k|$$

と表す．

**定義*** (零集合，ほとんどいたるところ．伊藤 [1] 32 頁，溝畑 [2] 54 頁)

集合 $e$ が測度 0 であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，有限または加算無限個の区間 $\{I_k\}$ を見つけることができて，それらの体積の和が $\varepsilon$ より小で，かつそれらで $e$ を被うことができるときをいう．すなわち

$$e \subset \bigcup I_k, \qquad \sum |I_k| < \varepsilon$$

そして測度 0 の集合を零集合と呼ぶ．零集合を除いて $f(x) = g(x)$ となるとき $f$ と $g$ とはほとんどいたるところ等しいと呼び

$$f = g \qquad \text{a.e.}$$

と表す．

**定義*** (可測関数．伊藤 [1] 67 頁，溝畑 [2] 55 頁)

$f(x),\quad x \in I$ が可測関数であるとは，1 列の階段関数 $\varphi_n(x)$ を見いだすことができて，その列がほとんどいたるところで $f(x)$ に収束するときをいう．すなわち

$$\varphi_n(x) \to f(x) \qquad \text{a.e.}$$

となることをいう．

集合 $E$ に対し，それを被覆する区間 $\{I_n\}$ すなわち

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

をとり，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$ の下限を $E$ の外測度と呼び $\overline{m}(E)$ と表す．

**定義*** (測度的に収束する．伊藤 [1] 167 頁，溝畑 [2] 60 頁)

区間 $I$ で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が $f(x)$ に測度的に収束するとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$e_n(\varepsilon) = \{x;\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\}$$

とおけば，$n \to \infty$ のとき $\overline{m}(e_n(\varepsilon)) \to 0$ が成り立つときをいう．このとき

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (\text{測度的に})$$

とかく．

**定義*** （有界可測関数の積分．伊藤［1］77 頁，溝畑［2］71 頁）

$f(x)$ を区間 $I$ で定義された有界な可測関数とする．そのとき $f(x)$ に測度的に収束する一様に有界な階段関数の列 $\{\varphi_n(x)\}$ をとり，定義として

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)dx$$

でもって，$f(x)$ の $I$ 上での積分と定義する．ここに

$$\int_I \varphi(x)dx = \sum_k c_k |I_k| w$$

である．

**定義*** （可測集合．伊藤［1］34 頁，溝畑［2］75 頁）

有界な区間 $I$ に含まれる集合 $E$ が可測であるとは $E$ の特性関数 $C_E(x)$ すなわち

$$C_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

が $I$ で可測であるときをいう．そして，$\int_I C_E(x)dx$ を $E$ のルベーグ測度と呼び

$$m(E) = \int_I C_E(x)dx$$

と表す．

**定義*** （可測集合上の積分．伊藤［1］77 頁，溝畑［2］98 頁）

有界な区間 $I$ に含まれる可測集合 $E$ 上で定義されている有界な関数 $f(x)$ が $E$ 上で可測関数であるとは $f(x)C_E(x)$ が $I$ で可測関数になっているときをいう．このとき

$$\int_E f(x)dx = \int_I f(x)C_E(x)dx$$

で左辺を定義する．

これで有界でない関数のルベーグ積分が定義できるところまできた．まず，$f(x) \geq 0$ でかつ $E$ で可測である場合

$$f_Y(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \leq Y, \\ Y, & f(x) > Y \end{cases}$$

とし

$$\int_E f(x)dx = \lim_{Y\to\infty} \int_E f_Y(x)dx$$

と定義する．右辺の極限が $+\infty$ に発散するときは

$$\int_E f(x)dx = +\infty$$

と表す．被積分関数が定符号でないときは

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0, \\ Y, & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & f(x) > 0, \\ -f(x), & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

と定義し，これを用いて次のように積分を定義する．

**定義***　(関数値が有界でないときの積分，可積分，可積関数．溝畑［2］101 頁)

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$$

ただし，$f$ は $E$ で可測であって右辺の積分は共に有限であるものとする．

このとき $f$ は $E$ 上でルベーグ積分可能であるという．簡単のため $f$ は可積分であるという．可積分な関数を可積関数と呼ぶ．

$E$ が有界でない場合について述べる．$\{I_n\}$ を

$$I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_k \subset \cdots \to \mathbb{R}^n$$

となる区間の列であるとする．

**定義***　($E$ が有界でないときの積分．溝畑［2］105 頁)

$f(x)$ は $E$ 上で可測であるとし

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E\cap I_k} f^+(x)dx < +\infty$$

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E\cap I_k} f^-(x)dx < +\infty$$

が同時に成り立つとき $f(x)$ は $E$ で可積分であるといい，その積分を

$$\int_E f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap I_k} f^+(x)dx - \lim_{k\to\infty} \int_{E\cap I_k} f^-(x)dx$$

で定義する．

積分をこのように定義したことによってリーマン積分より大きな自由が許されるようになる．詳しく述べることはできないが，二つだけ定理を引用しておく．

**定理*** （ルベーグの定理，伊藤［1］99 頁，溝畑［2］111 頁）

$E$ で $f(x)$ は有界，$\Phi(x)$ と $f_k(x)$, $k=1,2,\cdots$ は可積であって

$$f_k(x) \to f(x), \qquad \text{a.e.}$$
$$|f_k(x)| \le \Phi(x), \qquad k=1,2,\cdots$$

ならば，

$$\lim_{k\to\infty} \int_E f_k(x)dx = \int_E f(x)dx$$

が成り立つ．

**定理*** （フビニの定理，伊藤［1］100 頁，溝畑［2］127 頁, 130 頁）

$f(x,y)$ が $\mathbb{R}^2$ で可測であって

$$\int dy \int |f(x,y)|dx < +\infty,$$
$$\int dx \int |f(x,y)|dy < +\infty$$

のどちらかが成り立てば

$$\int dy \int f(x,y)dx = \int dx \int f(x,y)dy$$

が成り立つ．すなわち，積分の順序変更が可能である．

**定義*** （$L^2$空間, $L^1$空間）

可積関数 $f$ が

$$\int |f(x)|^2 dx < \infty$$

を満たすとき $f$ のノルム $\|f\|$ を

$$\|f\| = \left\{ \int |f|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

で定義し，このノルムで位相が定義される線形位相空間を $L^2$ で表し $L^2$ 空間と呼ぶ．ただし，$f=g$ a.e. であるとき $f$ と $g$ とは同一視する（a.e. は almost everywhere の略．$f=g$ a.e. は零集合を除いて一致するということ．このとき $L^2$ 空間の点としては同じ点であるとみなす）．

$$\int |f(x)|dx < \infty$$

であるとき，左辺の積分の値をノルムとする線形位相空間を $L^1$空間と呼ぶ．

**定義*** (ヒルベルト空間)

$H$ がベクトル空間であって，内積が定義されていて，その内積から導かれるノルムに関して完備であるときヒルベルト空間と呼ぶ.

**定理*** $L^2$ 空間は内積を

$$(f,g)=\int f\overline{g}dx$$

で定義するとヒルベルト空間となる.

$L^2$ 空間の元である関数を $L^2$ **関数**と呼ぶことにする．$L^2\subset\mathcal{S}'$ である．$L^1\subset\mathcal{S}'$ ももちろん成り立つ.

$L^2$ 関数は普通の意味では微分できないが，超関数の意味では微分できる．しかし $f\in L^2$ であっても，それを微分したものは $L^2$ に入るとはかぎらない．ここに，ソボレフ空間を導入する理由がある．まず，ソボレフ空間の定義をする.

**定義 2.5.1.** (ソボレフ空間)

$s\in\mathbb{R}^1$ とし $f\in\mathcal{S}', \langle D\rangle^s f\in L^2$ となるような $f$ のソボレフノルムを

$$\|f\|_s=\|\langle D\rangle^s f\|$$

で定義する．右辺の $\|\cdot\|$ は $L^2$ ノルムである．そして，このノルムによって位相を定義する線形位相空間 $H_s$ を**ソボレフ空間**と呼ぶ.

$$H_s=\left\{f\in\mathcal{S}';\langle D\rangle^s f\in L^2\right\}$$

である.

**例 14.** ソボレフ空間 $H_s$ は内積

$$(f,g)_s=\int\langle D\rangle^s f\,\overline{\langle D\rangle^s g}dx$$

によってヒルベルト空間となる.

また，$f\in H_s$，$g\in H_{-s}$ に対し，

$$\langle f,g\rangle=\int f\overline{g}dx$$

によって $H_{-s}$ は $H_s$ の双対空間になる.

**証明.** ヒルベルト空間であることを示すには，内積が定義され，それを用いてノルムが定義され，完備になることを示せばよい．$(f,g)_s$，$\| f \|_s$ が内積とノルムの条件を満たすことは容易に示される．よって，完備であることを示せばよい．ここで $L^2$ の完備性が用いられる．完備であることはコーシー列が収束すること，すなわち

$$\{f_j\} \subset H_s,\ \| f_j - f_k \|_s \to 0, \quad j,k \to \infty$$

のとき

$$^{\exists} f \in H_s;\ \| f - f_j \|_s \to 0, \quad j \to \infty$$

を示せばよい．

$$\| f_j - f_k \|_s^2 = \int \langle D_x \rangle^s f_j \overline{\langle D_x \rangle^s f_k} dx$$

であるから，$\{\langle D_x \rangle^s f_j\}$ は $L^2$ のコーシー列である．したがって $\| g - \langle D_x \rangle^s f_j \| \to 0$ となる $g \in L^2$ が存在することがその完備性からわかる．この $g$ に対し $g = \langle D_x \rangle^s f$ となる $f \in H_s$ が存在するから，$f_j \to f$ （$H_s$ の中で）となって完備性が示された．

$H_s$ と $H_{-s}$ とが互いに双対の関係にあることを示そう．$g \in H_{-s}$ とすると $f \in H_s$ に対し $T(f) = (f,g)$ とすれば $T$ は $H_s$ 上の線形汎関数となり $\| T \| = \| g \|_{-s}$ となること，および $T$ を $H_s$ 上の線形汎関数とすると $T(f) = (f,g)$ となる $g \in H_{-s}$ が存在して，$\| T \| = \| g \|_{-s}$ となることを示せばよい．証明は熊ノ郷［1］117 頁 定理 2.6 を見よ．

ここで有名なソボレフの補題を述べる．その前に $L^2$ の関数のフーリエ変換について述べておく．まず，$\mathcal{S}$ は $L^2$ で $L^2$ ノルムに関して稠密 (dense) であることを注意しておく．したがって $f_j \in \mathcal{S}$，$f_j \to f$ （$L^2$ の中で）とすると $\widehat{f_j} \in \mathcal{S}$，$\widehat{f_j} \to h$ （$L^2$ の中で）となる $h \in L^2$ が存在する．これを用いて $\widehat{f} = h$ と定義する．このときパーセバルの等式が成り立つ．すなわち $f,g \in L^2$ に対し

$$(f,g)_x = (\widehat{f}, \widehat{g})_\xi$$

が成り立つ．

**定理*** **（ソボレフの補題）**

$$s > \frac{n}{2} \ \Rightarrow\ H_s \subset C(\mathbb{R}^n)$$

詳しくは $f \in H_s$, $s > n/2$ ならば零集合の点で修正すれば連続関数になるということである．

**証明．**　熊ノ郷［1］115 頁 補題 2.5 を見よ．

**例 15.**　$\mathbb{R}^1$ で考えて，ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ はどのソボレフ空間の元であるといえるか．何回超関数としての原始関数をとれば連続になるのか．

**解．** $\langle D_x \rangle^s \delta$ のフーリエ変換は $\langle \xi \rangle^s$ であるから，これが $L^2$ に入るためには $s < -1/2$ であればよい．すなわち $\delta(x) \in H_{-1/2}$ といえるわけである．

したがって $s > 1$ とすると $\langle D_x \rangle^{-s} \delta \in \mathrm{C}^0$ といえる．

**問 35.**　$\mathbb{R}^1$ で考えて，$\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}$ はどのソボレフ空間に入るといえるか．

**問 36.**　次のダイアグラムを証明せよ．

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & \dot{\mathcal{B}} & & \\
 & & & & & & \cup & & \\
\mathcal{S}' \supset & H_{-\infty} & \supset \cdots \supset & H_0 & \supset \cdots \supset & & H_\infty & \supset \mathcal{S} & \\
 & \cup & & & & & & & \\
 & \mathcal{E}' & & & & & & &
\end{array}
$$

**定理 2.5.2.**　（擬局所性）

$P \in \mathrm{S}^m$ とする．任意の $u \in H_{-\infty}$ に対し

$$\operatorname{sing\,supp} Pu \subset \operatorname{sing\,supp} u$$

が成り立つ．

擬微分作用素 $P$ のこの性質を**擬局所性** (pseudo locall property) という．

**証明．**　$x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} u$ とする．$x_0$ の ある近傍 $U$ が存在し $U$ において $u$ は $\mathrm{C}^\infty$ である．$\varphi, \psi \in \mathrm{C}_0^\infty$ を $\operatorname{supp} \varphi \Subset \operatorname{supp} \psi \Subset U$ となるものとする．

$$\varphi P u = \varphi P(\psi u) + \varphi P\big((1-\psi)u\big)$$

と表すと，$\varphi P(\psi u) \in \mathrm{C}_0^\infty$ となる．また熊ノ郷［1］ 69 頁の定理 2.7 によって $\varphi P(1-\psi)$ を $1-\psi$ を掛けて $\varphi P$ を作用する作用素と見て，すなわち $\varphi P$ と $(1-\psi)$ の作用素としての積と見ると $\mathrm{S}^{-\infty}$ に入る．したがって $\varphi P u \in \mathrm{C}_0^\infty$ となる．ゆえに $x_0 \notin \operatorname{sing\,supp} Pu$ となる．

**定義 2.5.3.** (擬微分作用素の階数，滑化作用素)

線形作用素 $P: H_{-\infty} \to H_{-\infty}$ が任意の $s$ に対して

$$P: H_s \to H_{s+m} \quad (\text{連続的に})$$

が成り立つとき $P$ の**階数** (order) は $m$ であるという．

任意の $s$ に対して

$$P: H_s \to H_\infty \quad (\text{連続的に})$$

が成り立つとき $P$ は**滑化作用素** (smoothing operator) であるという．

**問 37.** $P \in \mathrm{S}^m$ ならば $P$ の階数は $m$ であることを示せ．$P \in \mathrm{S}^{-\infty}$ ならば $P$ は滑化作用素であることを示せ．

**定義 2.5.4.** (局所可解，準楕円型)

$P \in \mathrm{S}^m$ とし $x_0 \in \mathbb{R}^n$ とする．任意の $u \in H_{-\infty}$ に対し ある近傍 $U$ が存在して

$$U \cap \operatorname{sing\,supp} Pu = U \cap \operatorname{sing\,supp} u, \qquad {}^\forall u \in H_{-\infty}$$

が成り立つとき，$P$ は $x_0$ で**準楕円型** (hypoelliptic) であるという．開集合 $\Omega$ の各点で準楕円型であるとき $\Omega$ で準楕円型であるという．

$x_0$ の ある近傍 $U$ が存在して，任意の $f \in H_{-\infty}$ について

$$Pu = f \qquad (U \text{ において})$$

となる $u \in H_{-\infty}$ が存在するとき，方程式 $Pu = f, \quad f \in H_{-\infty}$ は $x_0$ で**局所可解** (locally solvable) であるという．

$Pu = f$ であるとき，$P$ が楕円型であれば $f$ が滑らかなら $u$ も滑らかである．準楕円型は $f$ の特異台と $u$ の特異台とが一致するということを主張している．$\mathrm{C}^\infty$ の範囲での話であり，楕円型のように解析性の範囲の話ではない．

ここでパラメトリックスと局所可解性，準楕円性との関係を述べる．

**定理 2.5.5.**　(パラメトリックスと局所可解性，準楕円性)

左局所パラメトリックスが存在すれば準楕円型である.

右局所パラメトリックスが存在すれば局所可解である.

ここに，$Q$ が $P$ の $x_0$ における**左局所パラメトリックス**であるとは $x_0$ の近傍で 1 となる $\mathrm{C}_0^\infty$ 関数 $\varphi(x)$ が存在して $\varphi(x)(QP-I) \in \mathrm{S}^{-\infty}$ が成り立つときをいう.

$(PQ-I)\varphi(x) \in \mathrm{S}^{-\infty}$ が成り立つとき $Q$ は**右局所パラメトリックス**であるという.

**証明.**　熊ノ郷 [1] 121 頁の定理 3.2, 3.4 を見よ.

# 第3章

# 放物型偏微分方程式の初期値問題

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ について高等学校で学んだことを思いだそう．解の公式 $x=(-b\pm\sqrt{b^2-4ac})/(2a)$ を得たら他には何もいらないわけではなかった．これ以外にも，解が一つか二つか，実数になるか虚数になるか，二つの解がともに負であるための条件はどうなるかなども重要なことであった．最後の条件は，微分方程式 $ay''+by'+cy=0$ の解が $t\to+\infty$ のときに必ず零に減衰する条件になっている．

偏微分方程式についても，微分多項式 $P$ に対し

$$Pu=0 \qquad \text{あるいは} \qquad Pu=f$$

を満たす解 $u$ を“すべて”求めることが大きな目的であるが，解が存在するか，ただ一つか，たくさん解があるときどのような条件をつけたらただ一つになるのかといったこと，また解がどのような関数であるのか，超関数になる解があるのか等々を調べることも重要である．

2 次方程式の場合は解は数であったが，微分方程式の場合は解は関数または超関数である．そして，常微分方程式の場合は一般解は方程式の階数に等しいだけの個数の任意定数を含むが，偏微分方程式の場合には一般解は任意関数を含む．

例えば上の 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の二つの解 $\alpha,\beta$ が共に負であれば，常微分方程式 $ay''+by'+cy=0$ の一般解

$$y = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t}$$

は，任意定数 $A, B$ が何であっても

$$\lim_{t \to \infty} y = 0$$

となるわけである．任意定数が定まった値になるためには，条件を二つ付さねばならない．どのような条件をつけたときに解が本当に一つだけになるのか，また，解は存在するのかといったことも重要なことである．

偏微分方程式の一つである波の方程式（空間 1 次元）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の場合は第 2 章の問 28 で示したように，任意の $f, g \in \mathcal{D}'$ に対し

$$f(ct - x) + g(ct + x)$$

が解となる．しかしこれだけではどのような条件をつけると解がただ一つ存在するのかということはわからない．常微分方程式の場合も同様であるが，偏微分方程式は，物理学，工学を始め多くの分野で重要な問題解決の手法であって，問題から条件が予め決まってくる場合が多い．方程式と，境界条件，初期条件などをあわせた問題が初めから与えられて，それについて調べなければならないことが普通である．

微分方程式を用いて物理学や工学などの問題を解決するときには次の三つの段階がある．

1° モデル化．

2° 数学的に解く．

3° 元の問題の言葉で解を解釈する．

**モデル化**とは与えられた問題を正しく数学的に表現することである．このときに，微分方程式の理論についての理解が必要になる．問題を数学の言葉を用

いて表現するわけであるが，数学の言葉（主として微分方程式）を知らなければそれは不可能である．数学にその言葉がなければ，つくらねばならない（新しい微分方程式の導入）．

数学的に解くということについては説明を要しないだろう．すでに解法がわかっているのであれば，それを学べばよいし，わかっていないのならば自分で解法をつくらねばならない（新しい解法の導入）．

数学的に解くということが有力であるのは，数学が有力であること，すなわち，完全に抽象化して解くところにある．反面，これが元の問題の言葉で解釈することの重要性をもたらしている．数学的に有力であり，結果が数学的に正しいことを，元の問題の解としての正確さと誤解することがないように注意しなければならない（数学の検算ではなく，元の問題の解として適当であるかどうかという検討が重要）．

これら三つの段階は，いずれも同等に重要である．

この章では擬微分作用素の応用として，放物型偏微分方程式の初期値問題の基本解の構成をする．熱伝導の方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (\partial_t - \triangle)u = f, \\ \\ \qquad u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

の基本解については第 2 章で少しふれたがここでは，それを少し一般化する．

偏微分作用素さらには擬微分作用素が放物型であるとの定義は作用素のシンボルによる定義と，作用素の性質による定義とがあり，それぞれにまた多くの定義があって，定義ごとに含まれる作用素の範囲が異なる．一般に弱い定義といわれるものは多くの作用素を含み，強い定義といわれるものは含まれる作用素は少ないが，種々の有力な性質をもつことが示される．

この章では熱伝導の方程式を変数係数の場合に拡張し，(3.3.1) で与えられるものにかぎって述べることにする．しかし，ここで述べる基本解の構成方法

はもっと一般の放物型に対して適用できるものである．詳しくは，参考文献の Tsutsumi, C.［1］，Shinkai, K.［1］などを見よ．

第 3.1 節では，偏微分方程式の一般的なことについて少し述べる．

第 3.2 節では熱伝導の方程式がどのように導かれるかを述べる．そうすれば (3.3.1) で与えられる作用素の係数の物理的意味が理解できる．またモデル化の例にもなっている．

第 3.3 節では，基本解の構成を形式的に行う．これは，構成法の骨組みを理解しやすいためである．

第 3.4 節では，第 3.2 節で述べた方法が正当なものであることを証明する．これには，第 1 章，第 2 章の結果が用いられる．読者は，第 3.2, 3 節で擬微分作用素の明快で有力なことを体験するであろう．

第 3.5 節では，放物型の方程式の解の性質について述べる．これは，上で述べた三段階の内の最後の段階であるところの，元の問題の言葉で解の意味を解釈するときに，有用になる．

第 3.1 節の内容からみてもわかることであるが，この章で扱った内容は，偏微分方程式全体からみるとごくごく一部分である．線形偏微分方程式は偏微分方程式の中のごくごく一部であり，扱った放物型は線形偏微分方程式の一部である．放物型偏微分方程式の中でも一部の形にかぎり，付加条件も初期条件にかぎっているのである．

## 3.1. 偏微分方程式の分類

第 2.4 節では典型的な三つの偏微分方程式についての古典的基本解と初期値問題の基本解について述べたが，この節では，なぜあの三つが典型的であるのかということから始めよう．

簡単のため，独立変数は二つにかぎることにする．そして 2 階の偏微分方程式

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \tag{3.1.1}$$

について考えよう．$A, B, C$ は滑らかな実数値関数であり $A \neq 0$ であるとする．2 階の偏微分方程式が未知関数の 2 階偏導関数 $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ について 1 次式であって，その係数が未知関数とその導関数を含まないときその偏微分方程式は**半線形**であるという．上の (3.1.1) の方程式は **2 階半線形**である．$F(x,y,u,u_x,u_y)$ が $u, u_x, u_y$ について 1 次式であれば，半線形ではなく線形である．いまからの議論は主部である左辺についてだけの議論である．$(x,y) = (0,0)$ の近くで考えることにする．$g(0,y) = y$ となる $g(x,y)$ を用いて

$$\begin{cases} s = x, \\ t = g(x,y) \end{cases}$$

によって変数変換をするとヤコビアンは $x = 0$ において

$$\frac{D(s,t)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ g_x & g_y \end{vmatrix} = 1$$

となり 1 対 1 の変換になっていることがわかる．

$$u_x = u_s s_x + u_t t_x = u_s + g_x u_t,$$

$$u_y = u_s s_y + u_t t_y = g_y u_t$$

であるから，

$$u_{xx} = u_{ss} + 2g_x u_{st} + g_x^2 u_{tt} + g_{xx} u_t,$$

$$u_{xy} = g_y u_{st} + g_x g_y u_{tt} + g_{xy} u_t,$$

$$u_{yy} = g_y^2 u_{tt} + g_{yy} u_t$$

となる．

これらを (3.1.1) に代入すると

$$\begin{aligned} Au_{ss} + 2(Ag_x + Bg_y)u_{st} + (Ag_x^2 + 2Bg_x g_y + Cg_y^2)u_{tt} \\ = G(s, t, u, u_s, u_t) \end{aligned}$$

となる．

いま，$g(x, y)$ を

$$\begin{cases} A(x, y)g_x + B(x, y)g_y = 0, \\ g(0, y) = y \end{cases}$$

を満たすように選ぶ．(この 1 階の偏微分方程式の初期値問題は $C^2$ 級の解をもつ．この節の最後でそれについて簡単に述べる.) そうすれば，$u_{st}$ の係数は 0 になる．$A \neq 0$ であるから

$$g_x = -\frac{B}{A} g_y$$

となる．$u_{tt}$ の係数を $AH$ とおくと

$$H = A^{-2}(B^2 - AC)g_y^2$$

となる．したがって (3.1.1) は

$$u_{ss} - Hu_{tt} = A^{-1}G \tag{3.1.2}$$

と変換されたことになる．そして $H$ の符号は $B^2 - AC$ の符号に等しくなる．

$H > 0$ の場合，すなわち $B^2 - AC > 0$ の場合，(3.1.1) は双曲型であるという．波動方程式はこの場合の典型である．

$H < 0$ の場合，すなわち $B^2 - AC < 0$ の場合，(3.1.1) は楕円型であるという．ラプラシアンはこの場合の典型である．

$H = 0$ の場合，すなわち $B^2 - AC \equiv 0$ の場合，(3.1.1) は広義の放物型であるという．熱伝導の方程式はこの場合の典型である．

まとめると，

**定理 3.1.1.** **(2 階半線形方程式の分類)**

$$(3.1.1)_{再} \quad A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y)$$

は適当な変数変換

$$\begin{cases} s=x, \\ t=g(x,y) \end{cases}$$

によって

$$(3.1.2)_{再} \quad u_{ss}-Hu_{tt}=f(t,s,u,u_s,u_t)$$

と変換される．

**1°** $H>0$ なら**双曲型**，すなわち $u_{ss}-a(t,s)u_{tt}=f, \quad a(t,s)>0$

**2°** $H<0$ なら**楕円型**，すなわち $u_{ss}+a(t,s)u_{tt}=f, \quad a(t,s)>0$

**3°** $H=0$ なら**広義放物型**，すなわち $u_{ss}=f$

となる．ここに $f=f(s,t,u,u_s,u_t)$ である．

**問 1.** （2 次曲線の分類）方程式 $ax^2+2hxy+by^2+ex+fy+g=0$ が

1° 楕円，　2° 双曲線，　3° 放物線

を表すための条件を $a,h,b,e,f,g$ を用いて表せ．ただし $(a,b,h)\neq(0,0,0)$ とする．

波動方程式は $n=1$ の場合は例えば弦の振動を表す．電線の中を伝わる電気信号を表すときには電信方程式と呼ばれることもある．$n=2$ の場合は膜の振動，水面の波などを表す．$n=3$ の場合，空気の振動を表す．双曲型の方程式で表される現象はこれら以外にもたくさんある．

偏微分方程式は，もちろん，楕円型，双曲型，放物型の三つの型にかぎられるわけではない．本書ではこの節の終わりのところで少し触れる以外に扱わないが，1 階の方程式の理論はすべての偏微分方程式の理論において重要である．2 階の方程式でも，上の型にあてはまらない方程式で重要なものがたくさんあ

る．ここでは例として次の二つをあげておく．

一つは**トリコミの方程式**と呼ばれるもので

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

という形をしている．これは混合型偏微分方程式の典型である．気体の流れに亜音速と超音速が同時に存在する場合に現れる方程式である（岩波 数学辞典第 3 版 131C を見よ）．もう一つは**シュレディンガーの方程式**と呼ばれるもので

$$\frac{\partial u}{\partial t} - i \triangle u = 0$$

という形をしている．これは量子力学で基本的な方程式である（岩波 数学辞典第 3 版 436D を見よ）．

高階の方程式にも重要なものがたくさんあるが一つだけ例をあげておく．

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0$$

は**梁の振動の方程式**と呼ばれる．これは梁の振動を表す方程式である．

いろいろな現象とそれを表す偏微分方程式についての例を上に述べたが，現象から方程式を導くのが，この章の序で述べたモデル化ということである．いかにしてモデル化がなされるのか，すなわち，これらの方程式の導き方は，数学以外の学問分野に属することである．例えば，梁の振動の方程式は構造力学とか振動工学の教科書に現れる．そこには導き方が詳しく述べられている．この方程式は，宇宙ステーションのアンテナの振動を止めるためのコントロールにも重要な役割をする．

次に，偏微分方程式の解について少し触れる．例えば，1 次元の波の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c > 0 \text{ は定数}$$

は，

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\{f(x+ct) + f(x-ct)\} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\sigma)d\sigma$$

を解とする．これは，**ストークスの波動公式**と呼ばれる．

時間を含む偏微分方程式について，ある定めた時間における未知関数の値とその導関数の値を定めて，解を求める問題のことを初期値問題あるいはコーシー問題と呼ぶ．あらかじめ定める値のことを初期値あるいは Cauchy data と呼ぶ．ストークスの波動公式は初期値問題

$$(3.1.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = f(x), \\ u_t(0,x) = g(x) \end{cases}$$

の解になっている．物理的には，$f(x)$ は初めの波形，$g(x)$ は上下動の初期速度を表す．

**問 2.** $1^\circ$ ストークスの波動公式で表される $u(t,x)$ が (3.1.3) の解であることを示せ．
$2^\circ$ 1 次元の波の方程式を $\dfrac{\partial^2 u}{\partial s \partial y} = 0$ と変換する座標変換を求めよ．
$3^\circ$ これを用いてストークスの波動公式を導け．

物理的に考えると (3.1.3) の解は存在して，しかもただ一つであるが，数学的にはそれは証明すべきことである．解が存在することはストークスの波動公式が解を与えているからわかるが，これ以外に解がないことは

$$(3.1.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0,x) = 0, \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad u \equiv 0$$

を示さなければならない．

**問 3.** (3.1.4) が示されたら，(3.1.3) は解を一つしかもたないことを証明せよ．

定常状態にある物理現象を表す偏微分方程式は時間を含まない．例えば

$$\begin{cases} \triangle u = 0, \\ u(x) = f(x) \quad (\partial\Omega \text{ 上で}) \end{cases}$$

の解は $\partial\Omega$ 上で温度が $f(x)$ に保たれるときに $\Omega$ の内部の温度分布を表す．このように境界上での解の条件をつけ加えて偏微分方程式の解を求める問題を**境界値問題**という．

時間を含む場合でも，初期値だけではなく空間内のある領域の境界上での解の条件をつけ加えた問題を**初期値境界値問題**または**混合問題**という．放物型の初期値境界値問題については 第 3.2 節で触れることにし，ここでは双曲型の場合に少し述べておく．

これは擬微分作用素の理論は用いられないが，この章の初めに述べた微分方程式を用いて問題を解決するための三段階の例になっている．

均質な長さ $l$ の弦を考える．重力は働いていないものとし張力のみを考える．弦の振動を考えるのであるが，振幅は小さく，弦の各点は長さの方向すなわち $x$ 方向には動かず，それと直交する方向すなわち $y$ 方向にのみ運動し，ニュートンの運動法則にしたがうものとする．弦の張力を $T$ とし，単位長さあたりの質量を $\rho$ とする．弦の両端は固定されていて，初めの弦の形は $y = f(x)$ で初めは弦は静止しているものとする．時刻 $t$ のときの弦の $y$ 座標を $u(t,x)$ で表すことにすると $u(t,x)$ は初期値境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad c^2 = \dfrac{T}{\rho}, \\ u(0,x) = f(x), \\ u_x(0,x) = 0, \\ u(t,0) = u(t,l) = 0 \end{cases}$$

の解になる．第 2 式と第 4 式が両立しなければならないから $f(0) = f(l) = 0$ であることが必要である．ここまでが第 1 段階のモデル化にあたるところであ

る．まず現象を上のように理想化し，その上で物理法則を適用し，数学的表現を導くのである．どれだけ理想化してよいのか，どのように物理法則を適用するのかは，問題に対する数学以外のところの深い理解が必要である．その後の数学的表現を導くところは問題に対する理解と，数学的考察との両方が必要とされるところである．

この問題の場合，第 2 段階は（一意性については問題にしないとすれば）簡単で，

$$u(t,x) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2}f(x-ct)$$

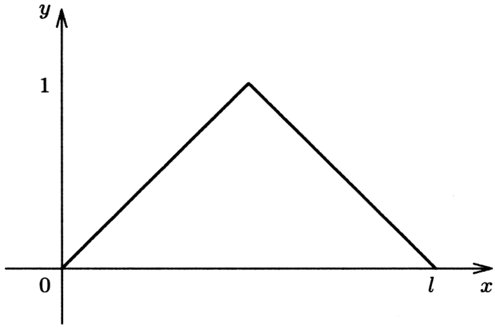
が求める解である．

第 3 段階の検討の数学的部分のみを述べる．弦の両端が固定されているから（問題の第 4 式から）任意の $t$ に対して

$$\begin{cases} f(ct) + f(-ct) = 0, \\ f(l+ct) + f(l-ct) = 0 \end{cases}$$

となることが必要である．第 1 式は $f$ が奇関数であることを意味し，第 2 式は $f$ が奇関数であることをあわせると，周期が $2l$ である周期関数であることを意味する．$t$ をパラメータとし $xy$ 平面で $y = u(t,x)$ のグラフを考えると，周期 $2l$ の関数のグラフ $y = f(x)/2$ を右へ $ct$ 移動したものと左へ $ct$ 移動したものを加え合わしたものになっている．これは，両端での反射を考えて右へ進む波と左へ進む波との和になっていることを意味し，現象をよく表していると考えられる．このことからも $u_{tt} = \triangle u$ が**波の方程式**と呼ばれることがわかる．

**問 4.** 上の初期値境界値問題において，$c = 0.1l$ とし $y = f(x)$ のグラフを次図のものとする．$t = 0$ から $t = 10$ まで 1 刻みにとり，弦の形を描け．（ $f(x)$ は周期 $2l$ の周期関数であり奇関数でもあることに注意せよ.）




$y = f(x)$ のグラフ

以上の例からわかるように，物理学，工学，経済学その他様々な分野の問題のモデル化によって様々な偏微分方程式に様々な条件がついた問題が設定される．その解についても超関数解を許すものもあれば，必ず滑らかな解になるものもある．また，解が一意であることも，多くの解をもつこともある．物理学，工学などの要請は，解は存在して，ただ一つであり，さらに初期値にも境界値にも元の方程式の係数にも連続的に依存することが望ましい．ここでは，古典的な方程式にかぎって結果だけを述べると，波の方程式の初期値問題，熱の方程式の初期値境界値問題，ラプラスの方程式の境界値問題などが適切な例である．また，熱の方程式を時間が負の方向に向かって解く初期値問題やラプラスの方程式の初期値問題は，適切でない例である．解が存在し一意でしかもデータ（初期値や境界値）に連続的に依存することを**適切** (well-posed) という．

**例 1.　楕円型初期値問題**

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \partial_x^2)u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = g(x), \\ u_t(0,x) = 0 \end{cases}$$

について，$g(x) = \sum a_n x^n$ と収束半径が零でないべき級数で表されることが

解が存在するために必要であることが知られている．熊ノ郷 [2] 75 頁を見よ．これから，この条件を満たさない初期値に対しては適切でないことがわかる．

$f(x)$ が $|x-c|<R$ を満たす $x$ に対して

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-c)^n$$

と表されるとき，$f(x)$ は $c$ において解析的であるという．

**問 5.** $x\in\mathbb{R}^1$ とする．関数 $f(x)\in C^{\infty}$ が $|f^{(n)}(c)|<n!MR^{-n}$ を満たすならば $|x_0-c|<R$ となる任意の $x_0$ において $f(x)$ は解析的であることを示せ．

**問 6.** **ラプラスの方程式** $(\partial_t^2+\partial_x^2)u=0$ について次の問に答えよ．

1° 変数変換 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ によって

$$(\partial_t^2+\partial_x^2)u=\left(\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}\right)u$$

となることを示せ．

2° $u(x,y)=v(\theta)w(r)$ と表されるとする．$(\partial_t^2+\partial_x^2)u=0$ であれば $v$ と $w$ は $k$ を定数として

$$\begin{cases} v''+kv=0, \\ w''+\dfrac{1}{r}w'-\dfrac{k}{r^2}w=0 \end{cases}$$

を満たすことを示せ．

偏微分方程式が与えられているときに，どのような条件をつけることによって適切な問題になるか，条件を込めて問題が与えられているときに，その問題が適切であるかどうか，を研究することがまず重要なことになる．続いて問題になるのは，解が存在するときに，その解がどのような性質をもつか，滑らかか，超関数になるかどうか，周期関数である解が存在するか，無限遠で零になるか，そのときの減少の速さはどれ位か等々を調べることである．もちろんこれら以外にも重要な問題はいくらでもある．

## 3.2. 熱伝導の方程式

この節では $\partial_t - \triangle$ が熱伝導を表す作用素であることを説明する．これはこの章の序で述べたモデル化の例である．熱の流れを表す方程式を導くという問題の最終段階であり，極めて理想化された状態についての考察になっている．

熱的に考えて等方性の固体を考える．場所によって温度が異なるならば，高温の部分から低温の部分へ熱が流れる．このとき，その流れ方が方向に無関係で，温度差のみによると考えるわけである．

面 $S$ を考える．$S$ の上にある点 $\mathrm{A}(x, y, z)$ における時刻 $t$ のときの温度を $u(t, x, y, z)$ とする．時間が $\Delta t$ だけ経過する間に $S$ の点 A における面要素 $\Delta S$ を通り抜ける熱量 $\Delta Q$ を考える．

熱の流れる向きは点 A の周囲で温度がもっとも低い方向である．$t$ を固定して

$$\lim_{h \to 0} \frac{u(t, x + ah, y + bh, z + ch) - u(x, y, z)}{h} = au_x + bu_y + cu_z$$

が最小である方向 $(a, b, c)$ に沿って熱が流れる．いま，$(a, b, c)$ の方向だけが問題であるから，

$$a^2 + b^2 + c^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

という条件の下で考える．$\nabla u = (u_x, u_y, u_z)$ とおく．記号 $\nabla$ はナブラとよむ．

$$(a, b, c) = -\nabla u \quad \text{ならば} \quad au_x + bu_y + cu_z = -|\nabla u|^2$$

であるから，熱の流れる方向は $-\nabla u$ であることがわかる．

**問 7.** $l, m, n$ は実定数とする．$a, b, c$ が

$$a^2 + b^2 + c^2 = l^2 + m^2 + n^2$$

を満たして変化するとき $al + bm + cn$ を最小にする $(a, b, c)$ を求めよ．

熱伝導率を $k(x,y,z)$ とする．先に述べた等方性ということは $k(x,y,z)$ が点の座標 $(x,y,z)$ にはよるが，方向には無関係になるということである．

$k(x,y,z)>0$ とする．熱伝導率の定義は $\nabla u$ に垂直な面上の単位面積を通って単位時間に流れる熱量が

$$-k(x,y,z)|\nabla u(x,y,z)|$$

で与えられるということである．

$S$ 上の点 A における単位法線ベクトル $n=(n_1,n_2,n_3)$ を，$n$ と $-\nabla u$ とが $S$ の同じ側にあるように定める．$n$ と $-\nabla u$ とのなす角を $\theta$ とすると，時間が $\Delta t$ だけ経過する間に $S$ の点 A における面要素 $\Delta S$ を通り抜ける熱量 $\Delta Q$ は

$$\Delta Q=-k(x,y,z)\Delta t|\nabla u|\Delta S\cos\theta$$

となる．そして，

$$|\nabla u|\cos\theta=|\nabla u|\frac{n\cdot\nabla u}{|\nabla u||n|}=n\cdot\nabla u$$

である．一般に $n=(n_1,n_2,n_3)$ とし

$$\frac{\partial u}{\partial n}=n\cdot\nabla u=n_1\frac{\partial u}{\partial x}+n_2\frac{\partial u}{\partial y}+n_3\frac{\partial u}{\partial z}$$

と表して，$u$ の法線微係数と呼ぶが，この記号を用いると，

$$\Delta Q=-k\Delta t\Delta S\frac{\partial u}{\partial n}$$

となる．これから，$S$ の単位面積を単位時間に通過する熱量を $q$ とすると

$$q=-k\frac{\partial u}{\partial n} \tag{3.2.1}$$

となることがわかる．

**問 8.** $u=$ 定数 を満たす点全体は $\mathbb{R}^3$ の曲面を表す．等温度面である．法線微係数はこの曲面の法線方向に沿った $u$ の変化率であることを示せ．

滑らかな閉曲面 $S$ の内部を $V$ とする．$S$ を通って時刻 $t_1$ から $t_2$ の間に $V$ に流れ込む熱量を $Q_1$ とすると，(3.2.1) によって

$$Q_1 = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial n}dS \tag{3.2.2}$$

となる．ここで $n$ は $S$ の内向き単位法線ベクトルであるとする．

物体自身が発熱しているとする．単位時間に単位体積あたり $g(t,x,y,z)$ の熱量がでているものとすると，$V$ 全体では，時刻 $t_1$ と $t_2$ の間の発熱量 $Q_2$ は

$$Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V g(t,x,y,z)dxdydz \tag{3.2.3}$$

である．

次に，比熱について述べる．比熱と密度との積を $\rho(x,y,z)$ と表すことにする．時刻が $t_1$ から $t_2$ に変わる間に体積要素 $\varDelta V$ の温度が $u_1 = u(t_1,x,y,z)$ から $u_2 = u(t_2,x,y,z)$ に変わったとすると，$\varDelta V$ において増加した熱量$\varDelta Q$ が

$$\varDelta Q = (u_1 - u_2)\rho\varDelta V$$

であるというのが比熱の定義である．

これと

$$u_2 - u_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t}dt$$

とから，$Q_1 + Q_2$ はまた

$$Q_1 + Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho\frac{\partial u}{\partial t}dV$$

と表される．$dV = dxdydz$ である．(3.2.2) と (3.2.3) とをあわせると，

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V \rho\frac{\partial u}{\partial t}dV = -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_V gdV$$

となる．ガウスの公式

$$-\iint_S k\frac{\partial u}{\partial n}dS = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} u)dV$$

を用いると

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \mathrm{div}(k\,\mathrm{grad}\,u) + g$$

すなわち

$$(3.2.4) \qquad \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) + g$$

を得る．

密度も比熱も熱伝導率も定数である場合には $c^2 = \dfrac{k}{\rho}$ とおくと (3.2.4) は

$$(3.2.5) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \triangle u + f(t, x, y, z)$$

となる．ただし

$$f(t, x, y, z) = \frac{1}{\rho} g(t, x, y, z)$$

である．

**問 9.** $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u) = \triangle u$ を示せ．

$\tau = c^2 t$ とおくと $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ であるから (3.2.5) は

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \triangle u + \frac{1}{c^2} f(c\tau, x, y, z)$$

となる．ここで，あらためて $\tau$ を $t$ とかき，$\dfrac{1}{c^2} f(ct, x, y, z)$ を $f(t, x, y, z)$ とかくことにすると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + f(t, x, y, z)$$

を得る．

これで，熱伝導の方程式が導かれた．無限に長い棒を考え，時刻 $t = 0$ のときの棒の温度分布が $u_0(x)$ であるとし，棒の表面は断熱されているものとすると，時刻 $t$ のときの棒の温度分布は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \triangle u, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

の解であることがわかる．この解は 第 2.4 節で与えたように

$$(2.4.6)_{再} \quad u(t,x) = E(t,0)u_0(x) + \int_0^t E(t,\tau)f(\tau,x)d\tau$$

となる．ただし $e(t,s,\xi)$ は初期値問題の基本解であり，次の式で $n=1$ として得られるものである．

$$(2.4.5)_{再} \quad e(t,s,\xi) = \exp[-(t-s)|\xi|^2]$$

これを一般化したものは，第 3.3 節で扱う．第 3.3 節以降，初期値境界値問題については触れないので，ここで少しだけ触れておくことにする．まず，$n=3$ の場合の境界値問題について述べる．

$$(3.2.6) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \triangle u + f(t,x), \qquad x \in \mathbb{R}^3$$

は，$a^2$ が熱伝導率，$c$ が比熱，$\rho$ が密度，$c\rho f(t,x)$ が熱源を表すときの，熱伝導の方程式である．解 $u(t,x)$ は時刻 $t$ のとき点 $x$ における温度を表す．$D \subset \mathbb{R}^3$ とし，$D$ の表面を $S$ とする．$D$ も $S$ も適当な条件を満たしているものとする．

初期条件を

$$u(0,x) = \varphi(x)$$

とする．初期時刻 $t=0$ のときの温度分布が $\varphi(x)$ である．

**1°** 表面における温度が与えられている場合：

$$u\Big|_S = \psi_1(t,x) \qquad \text{(ディリクレ条件)}$$

**2°** 表面を通過する熱流が与えられている場合：

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = \psi_2(t,x) \qquad \text{(ノイマン条件)}$$

**3°** 外部温度が $u_0$ であって，熱交換がある場合：

$$\left\{\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)\right\}\bigg|_S = 0$$

の基本的な三種類の境界条件のどれかと上の初期条件を方程式 (3.2.6) とあわせたものが初期値境界値問題の基本的な形である．物理的な意味，これらの条件の導かれ方など，詳しいことはコシリャコフ他［1］506 頁を見よ．

以下この節では有限な長さの棒の場合についての古典的な扱いについて長瀬［1］にしたがって述べることにする．

$$(3.2.7)\qquad \begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_x^2 u(t,x), & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0, & t > 0 \quad (\text{ノイマン条件}), \\ u(0,x) = \varphi(x) \end{cases}$$

について考える．これは上の $2^\circ$ の $\psi_2(t,x)$ が恒等的に零になっている場合である．$x = 0$ のところと $x = \pi$ のところで熱の出入りが全くないようにし，初めの温度分布が $\varphi(x)$ であるような長さ $\pi$ の棒の，時刻 $t$ のときの温度分布を求めよという問題である．棒は太さが無視できるものとし，表面は断熱されているものとしている．

まず初期条件を無視し，さらに解が

$$u(t,x) = f(t)g(x)$$

という形をしているとする．$u(t,x)$ が第 1 式と第 2 式を満たすなら $f(t)$ と $g(x)$ はどのような関数であるかを調べてみる．第 1 式から

$$f'(t)g(x) = f(t)g''(x)$$

となるから $f(t)$ と $f'(t)$ との比は $g(x)$ と $g''(x)$ との比に等しい．それを $\lambda$ とおくと

$$\begin{cases} f'(t) = \lambda f(t), \\ g''(t) = \lambda g(t) \end{cases}$$

となる．境界条件から $g$ は

$$\begin{cases} g''(t) = \lambda g(t), \\ g'(0) = g'(\pi) = 0 \end{cases}$$

という**ステュルム=リュウビル問題**の簡単な場合を満たすことがわかる.

$$g_\nu(x)\cos\nu x, \qquad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

が $\lambda = -\nu^2$ に対する解となる. $\lambda = 0, 1, 4, \cdots$ がこのステュルム=リュウビル問題の固有値で,

$$1,\ \cos x,\ \cos 4x,\ \cdots$$

がこの固有値に対応する固有関数である. そして, $\lambda = -\nu^2$ のとき

$$f(t) = Ce^{-\nu^2 t}$$

である. ここで

$$u(t,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{-\nu^2 t}\cos\nu x$$

とおき, 初期値を満たすようにできるかを考える.

$t = 0$ とおくと

$$u(0,x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \cos\nu x$$

であるから $\{C_\nu\}$ が

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu \cos\nu x$$

となるように選べて, さらにこの $\{C_\nu\}$ に対し

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} C_\nu e^{-\nu^2 t}\cos\nu x$$

が収束し何回か微分できるならば, (3.2.7) の解になる. $\varphi(x)$ がどのような条件を満たせば上のように表されるのか, さらに収束, 項別微分可能性などが成り立つのかということはフーリエ級数の教科書に詳しい. 簡単には, 長瀬 [1] §9.2 を見よ.

上の方法を一般化して 第 3.3 節で扱うような方程式に適用するのは困難である．

**例 2.**　初期条件を与える関数を $\varphi(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu\sin\nu x$ とするとき次の混合問題の解を求めよ．

$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)=\partial_x^2 u(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi,\\ u(t,0)=u(t,\pi)=0, & t>0\quad (\text{ディリクレ条件}),\\ u(0,x)=\varphi(x) & \end{cases}$$

**解．**　この場合，ステュルム＝リュウビル問題は

$$\begin{cases}g''(t)=\lambda g(t),\\ g(0)=g(\pi)=0\end{cases}$$

となり，その固有値は $-1,-4,\cdots$ で固有関数は $\sin\nu x,\quad \nu=1,2,\cdots$ である．したがって $u(t,x)$ は

$$u(t,x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C_\nu e^{-\nu^2 t}\sin\nu x$$

となる．ここで $t=0$ としたら $\varphi(x)$ と一致するから，これが混合問題の解となる．

**問 10.**　次の混合問題の解を求めよ．$t\to\infty$ としたときの解 $u_\infty(x)$ を求めよ．

1°
$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)=c^2\partial_x^2 u(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi,\\ u(t,0)=u(t,a)=0, & t>0\quad (\text{ディリクレ条件}),\\ u(0,x)=\varphi(x) & \end{cases}$$

2°
$$\begin{cases}\partial_t u(t,x)=c^2\partial_x^2 u(t,x), & t>0,\ 0<x<\pi,\\ u_x(t,0)=u_x(t,a)=0, & t>0\quad (\text{ノイマン条件}),\\ u(0,x)=\varphi(x). & \end{cases}$$

## 3.3. 放物型方程式の基本解の構成

この節では必ずしも一様ではない物体の熱伝導の方程式について考えることにする．$L$ を

$$
(3.3.1) \qquad Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \left\{ \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \sum_{k=1}^{3} b_k \frac{\partial u}{\partial x_k} + cu \right\}
$$

で定義する．(3.1.3) に対応する方程式は $Lu = f$ となる．$\delta$ を正定数とし

$$
(3.3.2) \qquad 係数はすべて\ \mathcal{B}, \quad a_j > \delta
$$

であるとする．そして簡単のため $L$ を

$$
(3.3.3) \qquad L = \partial_t + p(t, x, D_x) = \partial_t + P
$$

と表すことにする．$x \in \mathbb{R}^3$ である．

**問 11.** (3.3.1) の係数の物理的な意味をいえ．

**問 12.** (3.3.1) の $L$ について $\sigma(L)$ を求めよ．ただし $D_t$ に対応するシンボルの変数を $\xi_0$ とせよ．

この節の目的は，初期値問題

$$
(3.3.4) \qquad \begin{cases} Lu(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}
$$

の解 $u(t,x)$ を与える基本解 $E = e(t,s,x,D_x)$ のシンボル $e(t,s,x,\xi)$ を構成することである．

初期値問題の基本解の定義を述べる前に，パラメータを含むシンボルとその弱収束について定義しておく．

**定義 3.3.1.** (パラメータを含むシンボル，弱収束)

$I$ を閉区間 $[a,b]$ とする．パラメータ $t$ を含むシンボル $p(t,x,\xi)$ が $\mathcal{B}_t^k(\mathrm{S}^m;\ t \in I)$ に属するとは，$\mathrm{S}^m$ のフレッシェ空間としての位相（定理 1.5.2 の 2°）で

$t \in I$ について $m$ 回連続微分可能であることを表す.

パラメータ $t$ を含むシンボル $p(t,x,\xi)$ と $p(x,\xi) \in \mathrm{S}^m$ について

1° $\{p(t,x,\xi);\ t \in I\}$ は $\mathrm{S}^m$ の有界集合

2° $t \to a$ のとき，任意の $\alpha, \beta$ に対し $p^{(\alpha)}_{(\beta)}(t,x,\xi)$ は $p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)$ に広義一様収束

が成り立つとき， $p(t,x,\xi)$ は $\mathrm{S}^m$ において $p(x,\xi)$ に**弱収束**するといい

$$p(t,x,\xi) \underset{(弱)}{\longrightarrow} p(x,\xi) \qquad (t \to a \text{ のとき } \mathrm{S}^m \text{の位相で})$$

と表す.

54 頁の定理* は， $p(t) \underset{(弱)}{\longrightarrow} p$ なら $P(t)u \to Pu$ が成り立つということを主張するものである．この定理は定理 3.4.1 として次の節で証明する.

また， $u \in H_{s+m}$ とすると， $t \to a$ のとき

$$P(t)u \to Pu \qquad (H_s \text{ の中で})$$

も任意の $m$ について成り立つ（熊ノ郷［1］151 頁 定理 7.3 を見よ）.

**定義 3.3.2.** （初期値問題の基本解）

$t$, $s$ をパラメータとする擬微分作用素 $E = E(t,s)$ が $\sigma(E) = \sigma(E(t,s)) = e(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}^0_t(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}^1_t(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t)$ であって

$$(3.3.5) \qquad \begin{cases} \partial_t E + PE = 0, & 0 \le s < t < T, \\ e(t,s,x,\xi) \underset{(弱)}{\longrightarrow} 1 & (t \downarrow s \text{ のとき } \mathrm{S}^0 \text{ の中で}) \end{cases}$$

を満たすとき $E$ を**初期値問題** (3.3.4) **の基本解**と呼ぶ.

ここに， $\partial_t E$ は $e(t,s,x,\xi)$ をパラメータ $t$ について微分して得られたものをシンボルとする擬微分作用素である．$PE$ は作用素としての積である.

$e(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}^0_t(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}^1_t(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t)$ かつ $e(s,s,x,\xi) = 1$ とすると

$$e(t,s,x,\xi) \underset{(弱)}{\longrightarrow} 1 \quad (t \downarrow s \text{ のとき } \mathrm{S}^0 \text{ の中で})$$

となる．そして

$$E(t,s)f \to f \quad (t \downarrow s \text{ のとき } \mathcal{S}' \text{ の中で})$$

が成り立つ．この式の証明は次の節で与える．

(3.3.4) を満たす $E$ が基本解と呼ばれるわけは第 2.3 節でも述べたが，$u_0(x) \in L_2$ と $f(t,x) \in \mathcal{B}_t^0(L_2)$ に対し

$$u(t,x) = E(t,0)u_0(x) + \int_0^t E(t,\tau)f(\tau,x)d\tau \tag{3.3.6}$$

とおくと $u(t,x)$ が (3.3.4) の解となるからである．

**問 13.** (3.3.6) が形式的には (3.3.4) の解になることを示せ．

ここで $e(t,s,x,\xi)$ の存在や一意性がいえることだけでなく，以下に示すようにそのシンボルやシンボルの漸近展開が $p(t,x,\xi)$ から構成されることは，擬微分作用素による方法の有力さを示しているものといえる．

まず，簡単な場合から始める．$P=-\triangle$ の場合は第 2 章で述べたように

$$e^{-(t-s)\triangle}$$

が基本解になる．$P$ が $x$ に無関係のときには基本解のシンボルは

$$\exp\left[-\int_s^t p(\tau,\xi)d\tau\right]$$

で与えられる．$L$ が (3.3.1) であるときには

$$\tilde{E} = \exp\left[-\int_s^t p(\tau,x,D_x)d\tau\right]$$

は基本解にはならないが基本解のある意味での主部にはなる．基本解にならない理由の一つは可換性がないことによる．$AB \neq BA$ のとき $A$ と $B$ は可換ではないという．それでは，基本解はどのような形をするのであろうか．それは線形連立の常微分方程式系の場合から類推できる．次のことが成り立つ．

$A(t)$，　$X$ を $n$ 次正方行列，$I$ は単位行列とすると，

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \qquad X(0) = I$$

の解は

$$X(t) = I + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_j)ds_j$$

で与えられる． ここで $A(s_j)$ と $A(s_k)$ は可換でないことを注意せよ．

**問 14.** これを証明せよ．まずこの無限和が収束することを示せ．

この公式から類推すると (3.3.4) の基本解は形式的には

$$E(t,s) = I + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \cdots \int_s^{s_{j-1}} P(s_1)P(s_2)\cdots P(s_j)ds_j \tag{3.3.7}$$

と表されるはずである．ここに，$I$ は恒等作用素であり

$$P(s_k) = p(s_k, x, D_x)$$

である．(3.3.7) が形式的に (3.3.5) を満たすことは容易に確かめられる．

しかし (3.3.7) は擬微分作用素の無限積を含む．擬微分作用素の無限積は一般には定義できないから，このままではどうしようもない．この困難を切り抜ける方法を示したのが Tsutsumi, C［1］の論文である．

以下，Tsutsumi, C.［1］と Shinkai, K.［1］にしたがって基本解を構成する．

$$e_0(t,s,x,\xi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \cdots \int_s^{s_{j-1}} p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)ds_j \tag{3.3.8}$$

とおく．$e_0$ は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}e_0(t,s,x,\xi) + p(t,x,\xi)e_0(t,s,x,\xi) = 0, \\ e_0(s,s,x,\xi) = 1 \end{cases} \tag{3.3.9}$$

の解である．したがって

$$e_0(t,s,x,\xi) = \exp[-\int_s^t p(\tau,x,\xi)d\tau] \tag{3.3.10}$$

であり $0 < \delta' < \delta$ となる $\delta'$ と $C > 0$ が存在して

$$(3.3.11) \qquad |e_0(t,s,x,\xi)| \le C\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2], \qquad 0 \le s \le t \le T$$

と評価できる．そして

$$(3.3.12) \qquad e_0(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t)$$

となる．

**問 15.** 積分可能である任意の $p(\tau)$ に対し

$$\int_0^t \left\{ p(\tau) \int_0^\tau p(\sigma)d\sigma \right\} d\tau = \frac{1}{2}\left\{ \int_0^t p(\tau)d\tau \right\}^2$$

が成り立つことを示せ．これを用いて (3.3.8) から (3.3.10) を直接に示せ．

**問 16.** (3.3.8) の $e_0$ が収束して項別微分可能ならば (3.3.9) を満たすことを示せ．

**問 17.** (3.3.3) の $P$ のシンボル $p(t,x,\xi)$ を求めよ．(3.3.2) を満たすことを用いて

$$|p(t,x,\xi)| \ge \delta'|\xi|^2 - C$$

を証明せよ．

$e_1(t,s,x,\xi)$ を

$$e_1(t,s,x,\xi) = \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)]_1 ds_j$$

で定義する．ここに

$$(3.3.13) \qquad [p_1p_2\cdots p_j]_k = \sum_{|\alpha^*|=k} \frac{1}{\alpha^*!} p_1^{(\alpha_2^1+\cdots+\alpha_j^1)} p_{2,(\alpha_2^1)}^{(\alpha_3^2+\cdots+\alpha_j^2)} \cdots \cdots p_{j-1,(\alpha_{j-1}^1+\cdots+\alpha_{j-1}^{j-2})}^{(\alpha_j^{j-1})} p_{j,(\alpha_j^1+\cdots+\alpha_j^{j-1})},$$

$$\alpha^* = \alpha_2^1 + \cdots + \alpha_j^1 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_j^2 + \cdots + \alpha_j^{j-1}$$

である．

**問 18.** $p_l \in \mathrm{S}^{m_l},\ l = 1, \cdots, j$ とする.

$$\sigma(P_1 \cdots P_j) - \sum_{k=0}^{N-1} [p_1 \cdots p_j]_k \in \mathrm{S}^{m_1+\cdots+m_j-N}$$

となることを示せ（二つの擬微分作用素の積のシンボルの漸近展開の一般化になっている）.

この問 18 の結果を用いると

$$[p(s_1) \cdots p(s_j)]_1 \in \mathrm{S}^{2j-1}$$

となる. よって

$$e_1(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^{-1}; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^1; 0 \le s \le t) \tag{3.3.14}$$

となる. $q(t,s,x,\xi)$ を

$$q(t,s,x,\xi) = -\{\partial_t(e_0 + e_1) + \sigma\big(P(E_0 + E_1)\big)\}$$

とすると

$$q(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t) \tag{3.3.15}$$

となる. したがって $Q(t,s) = q(t,s,x,D_x)$ とおくと, $j = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\varphi_j(t,s,x,\xi)$$
$$= \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-2}} \sigma\left(Q(t,s_1)Q(s_1,s_2) \cdots Q(s_{j-1},s)\right) ds_{j-1}$$

が定義できて

$$|\varphi_{j,(\beta)}^{(\alpha)}(t,s)| \le C_{\alpha,\beta}^j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} \langle\xi\rangle^{-|\alpha|-2}, \qquad j = 1, 2, \cdots \tag{3.3.16}$$

と評価できる. これから無限和が収束して

$$\varphi(t,s) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t,s) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t) \tag{3.3.17}$$

となる. $\Phi(t,s)$ を $\sigma(\Phi(t,s)) = \varphi(t,s)$ となる擬微分作用素とする.

$$r(t,s) = \int_s^t \sigma\Big(\big(E_0(t,\theta) + E_1(t,\theta)\big)\Phi(\theta,s)\Big) d\theta$$

とおくと

$$r(t,s) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t) \tag{3.3.18}$$

となる．そして

$$(3.3.19)\quad e(t,s) = e_0(t,s) + e_1(t,s) + r(t,s)$$

によって初期値問題の基本解のシンボルが与えられる．

**問 19.** (3.3.7) で与えられる $E$ が基本解になっていることを形式的に示せ．

上の結果をまとめて定理として述べておく．

**定理 3.3.3.** (放物型方程式の初期値問題の基本解)

(3.3.1) の $L$ が条件 (3.3.2) を満たすとき放物型偏微分方程式の初期値問題 (3.3.4) の基本解のシンボルが (3.3.19) で与えられる．したがって，(3.3.4) の解は (3.3.6) で与えられる．

証明は次の節で与える．次の節の最後に $e(t,s,x,\xi)$ の漸近展開についての定理も述べる（定理 3.4.3）．

## 3.4. 主定理の証明と基本解の漸近展開

まず，第 1.5 節で述べた定理* (p.54) を詳しく述べて，その証明をする．それより前に，収束についての復習をしておく．$\{u_j\} \subset \mathcal{S}'$ のとき

$$u_j \to u \quad (\mathcal{S}' \text{ の中で}) \quad \Longleftrightarrow \quad \langle u_j - u, \varphi \rangle \to 0, \quad {}^\forall \varphi \in \mathcal{S}$$

であった．

**問 20.** $\mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^m,\ t \in I)$ の二つのシンボルの和はまた同じ空間に属することを示せ．

関数列あるいは超関数列の収束の定義は，

$\{u_j\} \subset H_s$ であるとき

$$u_j \to u \quad (H_s \text{ の位相で}) \quad \Longleftrightarrow \quad \| u_j - u \|_s \to 0$$

$\{u_j\} \subset \mathcal{S}$ であるとき

$$u_j \to u \quad (\mathcal{S} \text{ の位相で}) \quad \Longleftrightarrow \quad |u_j - u|_{l,\mathcal{S}} \to 0, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

であった．

次に，シンボルの収束と擬微分作用素の収束について復習する．

$$p_j(x,\xi) \underset{(\text{弱})}{\longrightarrow} p(x,\xi) \quad (\mathrm{S}^m \text{ の中で})$$

は，

$$p_j(x,\xi) \text{ は } \mathrm{S}^m \text{ の有界集合,}$$

$$p_{j(\beta)}^{(\alpha)}(t,x,\xi) \to p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x,\xi) \quad \text{広義一様収束}$$

の二つが成り立つことである（定義 3.3.1）．このとき次の定理が成り立つ．

**定理*** $p_j \underset{(\text{弱})}{\longrightarrow} p \quad (\mathrm{S}^m$ の中で) であり $u \in H_{s+m}$ ならば

$$P_j u \to Pu \quad (H_s \text{ の中で})$$

となる．

**証明．** 熊ノ郷 [1] 151 頁を見よ．

次の定理より上の定理の方がはるかに重要である．しかし本書では $H_s$ の理論については詳しく述べていないので，次の定理を述べ証明しておく．

**定理 3.4.1.**　(弱収束と作用素としての収束)

$p_j \underset{(弱)}{\longrightarrow} p$　($\mathrm{S}^m$ の中で) とするとき，次が成り立つ．

(3.4.1)　　$u \in \mathcal{S}$ に対し　$P_j u \to Pu$　($\mathcal{S}$ の位相で)

(3.4.2)　　$u \in \mathcal{S}'$ に対し　$P_j u \to Pu$　($\mathcal{S}'$ の位相で)

**証明.**　(3.4.1) を示すということは

$$|(P_j - P)u|_{l,\mathcal{S}} \to 0, \quad l = 0, 1, 2, \cdots$$

を示すことである．半ノルムの定義 (1.5.1) により

$$\sup_x \langle x\rangle^k |\partial_x^\alpha \{(P_j - P)u\}| \to 0$$

を示すことである．$p_j \underset{(弱)}{\longrightarrow} p$　($\mathrm{S}^m$ の中で) であるから，

$$\langle x\rangle^k \partial_x^\alpha (P_j - P)u = Q_j(x, D_x)u,$$

$$q_j(x,\xi) \to 0 \quad 広義一様$$

と表せる．したがってこの $q_j(x,\xi)$ に対して

$$\mathrm{Os}\text{-}\iint e^{-iy\cdot\eta} q_j(x,\eta) u(x+y) dy đ\eta \to 0$$

を示せばよいわけであるが，$\underset{(弱)}{\longrightarrow}$ の定義から被積分関数が一様に $L_2$ の関数で評価できて，ルベーグの定理によって積分と極限の順序が交換できて，これの成立がわかる．(定理 1.2.3 の $1°$ の証明を見よ.)

次に (3.4.2) の証明をする．$P$ と $P_j$ の形式的自己随伴作用素を $P^*$, $P_j^*$ とする．(3.4.1) によって $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$(P_j^* - P^*)\varphi \to 0 \quad (\mathcal{S}\ の位相で)$$

であるから

$$\langle (P_j - P)u, \varphi\rangle = \langle u, (P_j^* - P^*)\varphi\rangle \to 0$$

が任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対して成り立つことがわかるから (3.4.2) が示された．

この定理から (3.3.6) の $u(t,x)$ が (3.3.4) の解を与えることが得られるわけである．そのことはこの節の最後に述べることにし，全節で基本解を構成したときに残しておいた証明を始めることにする．

(3.3.8) の右辺の和

$$(3.4.3) \qquad 1+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\int_s^t ds_1\int_s^{s_1} ds_2\cdots \cdots\int_s^{s_{j-1}} p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)ds_j$$

が収束しそれが (3.3.9) を満たすことを証明する．(3.3.1) から

$$p(t,x,\xi)=a_1\xi_1^2+a_2\xi_2^2+a_3\xi_3^2-i(b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3)+c$$

であり係数はすべて $\mathcal{B}$ の関数であるとしたから

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(t,x,\xi)|<C_\alpha\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}$$

となる $t$ に無関係な $C_\alpha$ が存在する．したがって $|\alpha|=|\beta|=0$ の場合には

$$|p(s_1)p(s_2)\cdots p(s_j)|<C^j\langle\xi\rangle^{2j}$$

と評価できる．また

$$\int_s^t ds_1\cdots\int_s^{s_j} ds_j=\frac{(t-s)^j}{j!}$$

であるから

$$\left|(-1)^j\int_s^t ds_1\cdots\int_s^{s_j} p(s_1)\cdots p(s_j)ds_j\right|<\frac{1}{j!}C^j(t-s)^j\langle\xi\rangle^{2j}$$

と評価できて，任意の $N$ に対し

$$\left|1+\sum_{j=1}^{N}(-1)^j\int_s^t ds_1\int_s^{s_1} ds_2\cdots \cdots\int_s^{s_{j-1}} p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)ds_j\right|<\exp[C(t-s)\langle\xi\rangle^2]$$

が成り立つ．したがって和 (3.4.3) は収束し，項別微分可能である．この和を $e_0(t,s,x,\xi)$ とおいたのが (3.3.8) である．

**問 21.**　項別微分可能の条件を示せ．$e_0(t,s,x,\xi)$ の連続性，$t=s$ での右連続性，右可微分性を示せ．

項別微分をすると (3.3.9) の第 1 式を満たすことがわかる．また，第 2 式も自明である．

**問 22.**　$e_0(t,s,x,\xi)$ が (3.3.9) の第 1 式を満たすことを示せ．

$e_0(t,s,x,\xi)$ が常微分方程式の初期値問題 (3.3.9) の解であるから (3.3.10) と表されることはよく知られたことである．次に

$(3.3.11)_{再}$　$|e_0(t,s,x,\xi)| \le C\exp[-\delta|\xi|^2], \qquad 0 \le s \le t \le T$

と

$(3.3.12)_{再}$　$e(t,s,x,\xi) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^0; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^2; 0 \le s \le t)$

の証明をする．

$$|a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_3^2| > \delta|\xi|^2$$

が成り立つ．したがって $\delta'$ を $0 < \delta' < \delta$ となる定数とすると

$$|p(\tau,x,\xi)| > \delta'|\xi|^2 - C$$

が成り立つ（問 17 をみよ）．

これから

$$|e_0(t,s,x,\xi)| = |\exp[-\int_s^t p(\tau,x,\xi)d\tau]| < C\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2]$$

を得る．これは (3.3.11) である．

**問 23.**　上の式を示せ．

$|\alpha| = 0$ とする．(3.3.10) より

$$e_0^{(\alpha)}(t,s,x,\xi) = -\int_s^t p^{(\alpha)}(\tau,x,\xi)d\tau e_0(t,s,x,\xi)$$

となるから

$$|e_0^{(\alpha)}(t,s,x,\xi)| < C(t-s)\langle\xi\rangle^{-1}\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2]$$

と評価できる．任意の $|\alpha| = |\beta| = 0$ でない $\alpha, \beta$ に対しても同様に評価できて

$$|e_{0,(\beta)}^{(\alpha)}(t,s,x,\xi)| < C(t-s)\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2]$$

を得る．

$$\partial_t e_0(t,s,x,\xi) = -p(t,x,\xi)e_0(t,s,x,\xi)$$

であるから，$|\alpha| = |\beta| = 0$ でないときもこの式の両辺を順次微分して評価することによって

$$|\partial_t e_{0,(\beta)}^{(\alpha)}(t,s,x,\xi)| < C(t-s)\langle\xi\rangle^{2-|\alpha|}\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2]$$

を得る．これらから (3.3.12) が得られる．

**問 24.** $t > s > 0$ を固定すると $e_0(t,s,x,\xi) \in \mathrm{S}^{-\infty}$ であることを示せ．

(3.3.14) の証明．まず $e_1$ が

$$\text{(3.4.4)} \qquad \begin{cases} \partial_t e_1(t,s) + p(t)e_1(t,s) = -\displaystyle\sum_{|\alpha|=1} p^{(\alpha)}(t)e_{0,(\alpha)}(t,s), \\ e_1(s,s) = 0 \end{cases}$$

の解であることを示す．$e_1$ を定義している無限和が収束することと，項別微分可能であることは $e_0$ の場合と同様に示される．項別微分すると

$$\begin{aligned}
&\partial_t e_1(t,s) \\
&= \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_2 \int_s^{s_2} ds_3 \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(t)p(s_2)\cdots p(s_j)]_1 ds_j \\
&= p(t)\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_2 \int_s^{s_2} ds_3 \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_2)\cdots p(s_j)]_1 ds_j \\
&+ \sum_{|\alpha|=1} p^{(\alpha)}(t)\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_2 \int_s^{s_2} ds_3 \cdots \int_s^{s_{j-1}} \big(p(s_2)\cdots p(s_j)\big)_{(\alpha)} ds_j \\
&= -p(t)e_1 - \sum_{|\alpha|=1} p^{(\alpha)}(t)e_{0,(\alpha)}(t,s)
\end{aligned}$$

となる．$e_1(s,s) = 0$ は明らかである．よって証明された．

一般に

$$y' + p(t)y = q(t), \quad q(s) = 0$$

の解は

$$y = \exp[-\int_s^t p(\tau)d\tau] \int_s^t q(\tau)\exp[\int_s^\tau p(\sigma)d\sigma]d\tau$$

と表せる．これと $e_0$ の評価を用いると，

$$(3.4.5) \qquad |e_1(t,s)| \le \int_s^t \sum_{|\alpha|=1} |p^{(\alpha)}(\tau)e_{0,(\alpha)}(\tau,s)e_0(t,\tau)|d\tau$$

を得る．また (3.4.1) から

$$(3.4.6) \qquad |\partial_t e_1(t,s)| \le |p(t)e_1(t,s)| + \sum_{|\alpha|=1} |p^{(\alpha)}(t)e_{0,(\alpha)}(t,s)|$$

を得る．$e_{1(\beta)}^{(\alpha)}$ についても (3.4.4) の両辺を $x$ あるいは $\xi$ について微分して (3.4.5) と (3.4.6) とを用いると上と同様の議論ができて (3.3.14) が示される．

(3.3.15) の証明．

$$\begin{aligned} q(t,s) &= -\partial_t(e_0(t,s) + e_1(t,s)) - \sigma\Big(P(t)\{E_0(t,s) + E_1(t,s)\}\Big) \\ &= p(t)(e_0(t,s) + e_1(t,s)) + \sum_{|\alpha|=1} p^{(\alpha)}(t)e_{0,(\alpha)}(t,s) \\ &\qquad - \sigma\Big(P(t)\{E_0(t,s) + E_1(t,s)\}\Big) \end{aligned}$$

であるから (3.3.12) と (3.3.14) から (3.3.15) を得る．

(3.3.16) と (3.3.17) の証明の前に擬微分作用素の無限積についての定理を述べる．これは重要な定理である．

**定理 3.4.2.**　(擬微分作用素の**無限積の評価**)

$\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $S^0$ の有界集合であるとき，

$$R_j = P_1 P_2 \cdots P_j$$

とおくと

$$|r^{(\alpha)}_{j,(\beta)}(x,\xi)| \leq C^{j}_{\alpha,\beta}\langle\xi\rangle^{-|\alpha|}$$

となる $j$ に無関係な $C_{\alpha,\beta}$ が存在する.

**証明.** Tsutsumi, C. [1] を見よ.

この定理 3.4.2 の結果と

$$\int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-2}} ds_{j-1} = \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}$$

を用いると (3.3.16) が得られる. (3.3.17) は (3.3.15) と (3.3.16) から得られる.

(3.3.18) の証明のうち $r(t,s) \in \mathcal{B}^0_t(\mathrm{S}^0; 0 \leq s \leq t \leq T)$ となることは (3.3.12), (3.3.14), (3.3.17) から得られる. 残りは

$$\partial_t r(t,s) = \sigma\Big(\{E_0(t,t) + E_1(t,t)\}\Phi(t,s)\Big) + \int_s^t \partial_t \sigma\Big(\{E_0(t,s) + E_1(t,s)\}\Phi(\theta,s)\Big)d\theta$$

となるが $q$ の定め方から

$$\partial_t(E_0 + E_1) = -Q - P(E_0 + E_1)$$

となり, 右辺の積分は

$$\int_s^t \sigma\Big(\{Q - P(E_0 + E_1)\}\Phi\Big)d\theta \in \mathcal{B}^1_t(\mathrm{S}^2; 0 \leq s \leq t \leq T)$$

となる. よって $r$ について (3.3.18) が成り立つ.

(3.3.19) が初期値問題の基本解であることの証明.

$\varphi(t,s,x,\xi)$ の定義 (3.3.17) から

$$\varphi(t,s) = q(t,s) + \int_s^t \sigma\big(Q(t,\tau)\Phi(\tau,s)\big)d\tau$$

となる. したがって (3.3.19) の両辺を $t$ で微分すると (3.4.1) によって

$$\partial_t e(t,s) = \partial_t\{e_0(t,s) + e_1(t,s)\} + \partial_t r(t,s)$$

となる. ここで

$$\partial(e_0 + e_1) = -q - \sigma\big(P(E_0 + E_1)\big)$$

と $r$ の定義式を $t$ で微分した

$$\partial_t r(t,s) = \sigma\Big(\{E_0(t,t)+E_1(t,t)\}\Phi(t,s)\Big) + \int_s^t \partial_t\sigma\Big(\{E_0(t,\tau)+E_1(t,\tau)\}\Phi(\tau,s)\Big)d\tau$$

$$= \varphi(t,s) - \sigma(PR) - \int \sigma(Q\Phi)d\tau = q(t,s) - \sigma(PE)$$

を得る．ここでも $Q$ の定義

$$\partial(e_0+e_1) = -q - \sigma\big(P(E_0+E_1)\big)$$

を用いた．

**問 25.**　$E(t,0)u_0(x) + \int_0^t E(t,\theta)f(\theta,x)d\theta$ が (3.3.4) の解となることを示せ．

前の節で予告した初期値問題の基本解の漸近展開について述べる．(3.3.13) によって定義した $[p_1p_2\cdots p_j]_k$ が重要になる．

(3.3.13)$_{再}$

$$[p_1p_2\cdots p_j]_k = \sum_{|\alpha^*|=k} \frac{1}{\alpha^*!} p_1^{(\alpha_2^1+\cdots+\alpha_j^1)} p_{2,(\alpha_2^1)}^{(\alpha_3^2+\cdots+\alpha_j^2)} \cdots \cdots p_{j-1,(\alpha_{j-1}^1+\cdots+\alpha_{j-1}^{j-2})}^{(\alpha_j^{j-1})} p_{j,(\alpha_j^1+\cdots+\alpha_j^{j-1})},$$

$$\alpha^* = \alpha_2^1 + \cdots + \alpha_j^1 + \alpha_3^2 + \cdots + \alpha_j^2 + \cdots + \alpha_j^{j-1}$$

である．

**定理 3.4.3.**　**(初期値問題の基本解の漸近展開)**

$e_0(t,s,x,\xi)$ を

(3.3.10)$_{再}$　$e_0(t,s,x,\xi) = \exp[-\int_s^t p(\tau,x,\xi)d\tau]$

とし

$$e_k(t,s,x,\xi) = \sum_{j=2}^{\infty}(-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)]_k ds_j,$$

$$k = 1,2,\cdots$$

とすると，放物型偏微分方程式の初期値問題 (3.3.4) の基本解 $e(t,s,x,\xi)$ は

$$e(t,s,x,\xi) \sim e_0(t,s,x,\xi) + e_1(t,s,x,\xi) + \cdots$$

と漸近展開される．

**証明．** 以下，$x$ と $\xi$ とを省略する．$T>0$ を定数とし $0 \le s \le t \le T$ とする．

$$f_N(t,s) = \sum_{k=0}^{N} e_k(t,s)$$

とおく．

$$(3.4.7) \qquad \begin{cases} e(t,s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} e_k(t,s) + r_N(t,s), \\ |r_{N,(\beta)}^{(\alpha)}(t,s)| \le C_{\alpha,\beta}(t-s)\langle\xi\rangle^{1-(N+1)-|\alpha|} \end{cases}$$

となる $r_N(t,s)$ が存在することを示せばよい．

$$\left|\partial_\xi^\alpha D_x^\beta \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_1,x,\xi)p(s_2,x,\xi)\cdots p(s_j,x,\xi)]_k ds_j\right|$$
$$\le (j!)^{-1}(t-s)^j C_{\alpha,\beta}^j \langle\xi\rangle^{2j-k-|\alpha|}$$

であるから (3.4.7) の右辺は収束する．$t$ について項別微分することもできる．そして

$$[p(t)p(s_1)\cdots p(s_j)]_k$$
$$= p(t)[p(s_1)\cdots p(s_j)]_k + \sum_{\mu=1}^{k}\sum_{|\alpha|=\mu}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(t)[p(s_1)\cdots p(s_j)]_{k-\mu,(\alpha)}$$

であるから

$$\partial_t e_k(t,s) + p(t)e_k(t,s) = -\sum_{\mu=1}^{k}\sum_{|\alpha|=\mu}\frac{1}{\alpha!}p^{(\alpha)}(t)e_{k-\mu,(\alpha)}(t,s)$$

となる．これから (3.3.14) の証明と同様にして

$$e_k(t,s) \in \mathcal{B}_t^0(\mathrm{S}^{-k}; 0 \le s \le t) \cap \mathcal{B}_t^1(\mathrm{S}^{-k+2}; 0 \le s \le t),$$
$$e_k(s,s) = 0$$

を得る．

$$q(t,s) = -\left\{\partial_t(e_0+e_1+\cdots+e_N)+\sigma\bigl(P(E_0+E_1+\cdots+E_N)\bigr)\right\}$$

とおく．

$$\varphi_1(t,s)=q(t,s),$$

$$\varphi_j(t,s)=\int_s^t ds_1\int_s^{s_1}ds_2\cdots$$

$$\cdots\int_s^{s_{j-2}}q(t,s_1)q(s_1,s_2)\cdots q(s_{j-1},s)ds_{j-1}$$

とおけば

$$\varphi(t,s)=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(t,s)$$

が定義できること，

$$r_N(t,s)=\int_s^t\sigma\Bigl(\{E_0(t,\tau)+\cdots+E_N(t,\tau)\}\Phi(\tau,t)\Bigr)d\tau$$

とおいて

$e_0,e_1,\cdots e_N,r_N$ は (3.4.7) を満たす

ことが (3.3.18), (3.3.19) と同様にして示される．

## 3.5. 放物型方程式の解の性質

この節では放物型偏微分方程式の初期値問題

$$(3.3.4)_{再} \quad \begin{cases} Lu(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

の解の性質について述べる．ここに

$$(3.3.1)_{再} \quad Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \left\{ a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} + cu \right.$$

である．ここで $\delta$ を正定数とし

$(3.3.2)_{再}$ 　係数はすべて $\mathcal{B}$, $\quad a_j > \delta$

と仮定されている．したがって

$$\delta_1 |\xi|^2 - C < |p(t,x,\xi)| < \delta_2 \langle \xi \rangle^2$$

が成り立つような正定数 $C$, $\delta_1$, $\delta_2$ が存在する．

この条件の下で初期値問題 (3.3.4) の解が (3.3.19) の $e(t,s,x,\xi)$ を用いて

$$(3.3.6)_{再} \quad u(t,x) = E(t,0)u_0(x) + \int_0^t E(t,\tau)f(\tau,x)d\tau$$

によって与えられる．これは (3.3.4) の解の存在を示しているが，これ以外に解があるかどうかについては述べているものではない．解があったとしたらただ一つであるということを，**解の一意性**という．解の存在は解の一意性を意味しないし，解の一意性は解の存在を主張するものではない．

この節では (3.3.6) で与えられる解の性質について述べるが，その前に解の属する空間を制限すれば (3.3.4) について一意性が成り立つことを示す．

**定理 3.5.1.** **(放物型方程式の初期値問題の解の一意性)**

$u(t,x) \in \mathcal{B}_t^2(\mathcal{M}; 0 \le t \le T)$ が (3.3.4) を満たすならば (3.3.6) と表される．すなわち $\mathcal{B}_t^2(\mathcal{M}; 0 \le t \le T)$ に属する (3.3.4) の解はただ一つしか存在しない．

**証明.** (3.3.6) の $u(t,x)$ が (3.3.4) を満たすことは 第 3.4 節で証明した. ここでは, $u(t,x)$ が $\mathcal{B}_t^2(\mathcal{M}; 0 \le t \le T)$ に属し (3.3.4) の解であれば (3.3.6) と表されることを証明する.

$$E(t,\tau)f(\tau,x) = E(t,\tau)\{\partial_\tau u(\tau,x) + P(\tau)u(\tau,x)\}$$

であるが, 後で示すように

$$\partial_s e(t,s,x,\xi) = \sigma\big(E(t,s)P(s)\big) \tag{3.5.1}$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}&\partial_\tau\big(E(t,\tau)u(\tau,x)\big)\\ &= \big(\partial_\tau E(t,\tau)\big)u(\tau,x) + E(t,\tau)\partial_\tau u(\tau,x)\\ &= -E(t,\tau)P(\tau)u(\tau,x) + E(t,\tau)\partial_\tau u(\tau,x)\end{aligned}$$

となる. したがって

$$E(t,\tau)f(\tau,x) = \partial_\tau\big(E(t,\tau)u(\tau,x)\big)$$

となる. よって

$$\int_0^t E(t,\tau)f(\tau,x)d\tau = u(t,x) - E(t,0)u(0,x)$$

となり (3.3.6) と表されることが得られた.

ここで注意しなければならないことは, $E(t,s)u(s,x)$ が定義できなければならないということである. $u \in \mathcal{D}'$ とすると $Eu$ は $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$\langle Eu, \varphi\rangle = \langle u, E^*\varphi\rangle$$

で定義されるが, 第 3.3 節で構成した $E$ を用いると, $\varphi \in \mathcal{D}$ であっても $E^*\varphi \in \mathcal{D}$ であるとは一般にはいえない. したがって, このときには $\langle u, E^*\varphi\rangle$ が定義できなくなる. $E^*\varphi$ の $|x| \to \infty$ のときの減少の程度に応じて $u$ の増大の程度の制限が必要になる. $E^*\varphi$ の減少の程度は $\exp[-|x|^2/\varepsilon]$ であるから $u \in \mathcal{M}$ は十分すぎる条件である.

(3.5.1) の証明. $e(t,s)$ の構成と全く同様にして $\tilde{e}(t,s) = \sigma(\tilde{E}(t,s))$ を

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{e}(t,s) + \sigma(\tilde{E}(t,s)P(s)) = 0, \\ \tilde{e}(t,t) = 1 \end{cases}$$

を満たすように構成することができる．

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3_x)$ に対し

$$h(\theta) = \big(E(\theta,s)f(x), \tilde{E}^*(t,\theta)g(x)\big)$$

とおく．

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}h(\theta) &= -\big(P(\theta)E(\theta,s)f(x), \tilde{E}^*(t,\theta)g(x)\big) \\ &\quad + \big(E(\theta,s)f(x), P^*(\theta)\tilde{E}^*(t,\theta)g(x)\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから $h(\theta)$ は $\theta$ に無関係となる． $h(t) = h(s)$ より

$$\big(E(t,s)f(x), g(x)\big) = \big(f(x), \tilde{E}^*(t,s)g(x)\big)$$

となり

$$E(t,s) = \tilde{E}(t,s)$$

を得る．したがって

$$\partial_s e(t,s) - \sigma\big(E(t,s)P(s)\big) = 0$$

を得る．これで (3.5.1) が証明された．

解空間を $\mathcal{B}^1_t(\mathcal{M}; 0 \leq t < T)$ すなわち $x$ については緩増加関数であるとすると一意性が成り立つことを示したのであるが，条件を緩めると一意性が成り立たないことは次の例と問 26 からもわかる．

**例 3.** $x \in \mathbb{R}^1$ とする．無限級数

(3.5.2) $$g(t,x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} \frac{d^j}{dt^j} e^{-1/t^2}$$

は収束し

(3.5.3) $$\begin{cases} (\partial_t - \partial_x^2) g(t,x) = 0, \\ g(0,x) = 0 \end{cases}$$

の解になっている.

**解.** まず, 収束することを示す. コーシーの積分公式によって

$$\frac{d^j}{dt^j}e^{-1/t^2}=\frac{j!}{2\pi i}\oint\frac{e^{-1/z^2}}{(z-t)^{j+1}}dz$$

と表される. これを用いると

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}e^{-1/t^2}\right|\le\frac{2^j j!}{t^j}e^{-4/(81t^2)}$$

と評価できる. これから一様収束し

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left|\frac{x^{2j}}{(2j)!}\frac{d^j}{dt^j}e^{-1/t^2}\right|\exp\left[-\frac{4}{81t^2}+\frac{x^2}{t}\right]$$

と評価できる. $t, x$ について微分したものも同様に一様収束するから $t\ge 0$ のとき $C^\infty$ になることも示される.

解になることは容易に示される. 詳しくは Pucci, C. [1] を見よ.

上の例の (3.5.2) 式の $e^{-1/t^2}$ とは別の関数を選べば

$$|g(t,x)|<C\exp[c|x|^{2+\varepsilon}]$$

が成り立つと同時に (3.5.3) の解であるようにできる. これは, 次の問の 2° とあわせると, 一意性の成り立つぎりぎりの条件を与えていることになる. 詳しくは Friedman, A. [1] 31 頁を見よ.

**問 26.** 1° 上の例の関数 $g(t,x)$ について

$$|g(t,x)|\le C_1\exp[c_2|x|^2]$$

となる評価は成り立たない.

2° 初期値問題

$$(3.5.4)\qquad\begin{cases}(\partial_t-\partial_x^2)u(t,x)=f(t,x),\\ u(0,x)=u_0(x)\end{cases}$$

の解は一意でないが

$$|u(t,x)|<\exp[c|x|^2]$$

を満たす解は一意である.

3° $f(t,x)=0$ とする． $|u_0(x)| \le Ce^{c|x|^2}$ であれば

$$u(t,x)=E(t,0)u_0(x)$$

と表されることを示せ．これを用いて

$$\lim_{t\to\infty} u(t,x)=0,$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x)=0$$

が成り立つことを示せ．

次に初期値問題 (3.3.4) において $f(t,x)=0,\ u_0(x)\in H_{-\infty}$ であるときの解 $u(t,x)$ が $|x|\to\infty$ のときに $u(t,x)\to 0$ となることを示す．

これは初めの熱が広く薄く拡散していくことに対応していると考えられる．

**定理 3.5.2.** **（解の減衰）**

$u(t,x)$ が (3.3.4) において $u_0\in H_{-\infty}$，$f(t,x)=0$ としたときの解であれば，

$$\lim_{|x|\to\infty} u(t,x)=0$$

となる．

**証明.** 一意性が成り立つ（定理 3.5.1 ）から， $u(t,x)=E(t,0)u_0(x)$ と表される．$t>0$ を固定すると $e(t,0,x,\xi)\in \mathrm{S}^{-\infty}$ であり，$\mathrm{S}^{-\infty}$ のシンボルをもつ擬微分作用素は $H_{-\infty}$ を $H_\infty$ に写す（問 38 ）． $H_\infty\subset\dot{\mathcal{B}}$ （定義は第 2 章問 26 ）となる．ゆえに， $\dot{\mathcal{B}}$ の定義から $t>0$ を固定して $|x|\to\infty$ とすると $u(t,x)\to 0$ となる．

ここまでは，滑らかな初期値と滑らかな $f(t,x)$ についての初期値問題を考えてきた．これらを超関数にまで広げて考えたとき，はたして解は存在するのであろうか，またその解はどのような性質をもつのであろうか．これについて述べる前にパラメータを含む超関数のパラメータについての微分や積分について述べる．

パラメータ $t$ を含む超関数 $f(t)\in\mathcal{S}'$ を $t$ について $a$ から $b$ まで積分した超

関数を，任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し

$$\left\langle \int_a^b f(t)dt,\ \varphi \right\rangle = \int_a^b \langle f(t),\ \varphi\rangle dt$$

で定義する．パラメータに関しての微分についても同様に定義する．ただし右辺が意味をもつ場合にそれで左辺を定義するのである．

初期値問題 (3.3.4) において $u_0 \in \mathcal{S}'$, $f(t) \in \mathcal{B}_t^1(\mathcal{S}')$ とする．

$$u(t) = E(t,0)u_0 + \int_0^t E(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

とおくと，$u(t) \in \mathcal{B}_t^2(\mathcal{S}')$ となる．$\mathcal{S}'$ の代りに $\mathcal{E}'$ とすると $u(t) \in \mathcal{B}_t^2(\mathcal{E}')$ とはいえない．解の台（定義 2.1.1）は広がる．この節の最後にそれを述べる．しかし解の滑らかさについて次のことはいえる．

**定理 3.5.3.**　**（解の滑らかさ）**

$u_0 \in \mathcal{S}'$ とし $f(t) \in \mathcal{B}_t^1(\mathcal{S}'; 0 \le t < T)$ とすると (3.5.4) の $u(t,x)$ は $t > 0$ を固定すると $x$ について無限回微分可能になる．

**証明.**　$t > 0$ を固定すると $E(t,0)$ は滑化作用素（定義は 107 頁にあり）であり $H_\infty \subset \dot{\mathcal{B}}$ である（問 37 ）から $u(t,x)$ は $x$ について無限回微分可能になる．

最後に，初期値問題

$$(3.5.5)\qquad \begin{cases} (\partial_t - c^2\partial_x^2)u(t,x) = 0, \\ \qquad\qquad u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

について不自然ともいえる結果を述べる．どう不自然なのかについては後で述べる．$x \in \mathbb{R}^1$, $M > 0$ 定数とし，初期値を

$$u_0(x) = \begin{cases} M, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

とする．

$t > 0$ における (3.5.5) の解は

$$u(t,x) = \frac{M}{2c\sqrt{\pi t}} \int_a^b \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4c^2 t}\right] dy \tag{3.5.6}$$

と表される．これからすぐにわかるように

$$t > 0 \text{ ならばすべての } x \text{ に対し } u(t,x) > 0$$

となる．これは物理的に不自然である．一瞬のうちに熱が無限に広がってしまうことを意味していることになる．

この不自然さは，自然現象を理想化して数学的に扱えるようにしたところにある．数学的に定式化されたものは，強い理想化によっているから，結果は現実を近似しているにすぎない．現実は，理想化されたものから複雑に少しずつ外れているのである．

**問 27.** (3.5.6) が (3.5.5) の解であることを示せ．

**問 28.** 初期値問題 (3.5.5) の基本解のシンボルをかけ，これを用いて (3.5.6) を導け．第 2 章の問 31 の結果と較べよ．

**問 29.** 定理 3.5.3 の後の例によって解は $x$ について解析的である．したがって，$x$ を含むある区間において解が定数になっていることはありえない．このことを示せ．

この問の結果は，熱は常に流れているということを示している．

**問 30.** $\partial_t - (1+x^2)\partial_x^2$ の初期値問題の基本解をつくれ．漸近展開を求めよ．

# 第 1 章の解答

**解 1.** 二つの微分多項式の積は微分単項式の積の和になるから，単項式の場合に (1.1.4) を示せばよい．$p_1(x,\xi)=a(x)\xi^\beta$, $p_2(x,\xi)=b(x)\xi^\gamma$ とする．ライプニッツの公式 $Q(uv)=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}(D_x^\alpha u)(q^{(\alpha)}(D_x)v)$ において $Q$, $u$, $v$ をそれぞれ $D_x^\beta$, $b(x)$, $D_x^\gamma u$ とすると

$$P_1P_2u=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\big(a(x)D_x^\alpha b(x)\big)\big(D_x^{\beta-\alpha}D_x^\gamma u(x)\big)$$
$$=\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}P_1^{(\alpha)}P_{2(\alpha)}u(x)$$

となる．

**解 2.** $F(t)=f(x+th)$ であるから $F(1)=f(x+h)$, $F(0)=f(x)$ である．$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)$ とすると

$$F^{(m)}(t)=(h_1\partial_1+\cdots+h_n\partial_n)^m f(x+th)=\sum\frac{m!}{\beta!}h^\beta\partial_x^\beta f(x+th)$$

となり，合成関数の微分法の公式を繰り返し用いて

$$F^{(m)}=\sum\frac{m!}{\beta!}h^\beta\partial_x^\beta f(x)$$

となる．これらを 1 変数のテーラーの公式に代入すると求めるものとなる．

**解 3.** 定数 $A$ を $A^2>2$ が成り立つものとすると

$$A^2\langle x\rangle^2\langle y\rangle^2-\langle x+y\rangle^2\geq 2(x^2+1)(y^2+1)-(x^2+y^2+1)>0$$

となり，第 1 式が成立する．$x=-y-z$ とおくと第 2 式は第 1 式に帰着される．

**解 4.** $g(0)=1$ であることはすぐにわかる．$C^\infty$ となることを示せばよい．それも $|x|\neq 1$ においては明らかであるから $x=1$ において示せば十分である．

$h>0$ とすると $g(1+h)=g(1)=0$ であるから右微係数は 0 となる．したがって左微係数も 0 となることを示せばよい．

$g(1-h)=e^{1-1/(1-(1-h)^2)}=e^{-1/(2h)}e^{1+1/(4-2h)}$ であるから $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}e^{-1/(2h)}=0$ を示せばよい．(これは問 6 を見よ.) $g^{(k)}(1)=0$ も帰納的に示される．

**解 5.** 正定数 $R_0$ を1つ定める．$|x| \le R_0$ における $f(x)$ の最大値を $C_0$ とする．(1.1.6) によって“$|x| > R$ ならば $f(x) < C_0$”となる正定数 $R$ が存在する．$|x| \le R$ における $f(x)$ の最大値を $C$ とする．最大値を与える点を $x_0$ とする． $C_0 \le C$ である．したがって $C = f(x_0)$ が $\mathbb{R}$ 全体で考えても $f(x)$ の最大値になる．

注． $f(x) \ge 0$ という条件を外すと， $f(x)$ は最大値をとるとはかぎらない．例えば $f(x) = -e^{-x^2}$ がある．

**解 6.** $\lim_{|x|\to\infty} x^m e^{-x^2} = 0$ を示せば十分である．テーラーの定理によって

$$e^{x^2} > 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{2n}$$

が成り立つから $2n > m$ となるように $n$ を選べば

$$|x^m e^{-x^2}| \le n!|x^{m-2n}|$$

となり $|x| \to \infty$ のとき $|x^{m-2n}| \to 0$ となることから $x^m e^{-x^2} \to 0$ となる．

積分の値の計算は

$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

において極座標に変換すれば得られる．

**解 7.** $|f(x)| < C/(1+x^2)$ となる $C$ が存在する（これは (1.1.6) による）から $\lim_{R,\,R'\to\infty} \int_{-R'}^{R} f(x)dx$ も存在する．

**解 8.** $\partial_j(f(x)u(x)) = (\partial_j f(x))u(x) + f(x)(\partial_j u(x))$ であり $\int \partial_j(f(x)u(x))dx_j = 0$ であるから $\int \partial_j(f(x)u(x))dx = 0$ も成り立つ．

**解 9.** $|y| > \varepsilon$ ならば $g_\varepsilon(y) = 0$ であり， $|y| \le \varepsilon$ ならば $x < -1-\varepsilon$ に対して $f(x-y) = 0$ が成り立つから， $x < -1-\varepsilon$ ならば $g_\varepsilon(y)f(x-y) = 0$ となって， $f(x)$ も 0 となる．同様にして $x > 1+\varepsilon$ ならば $f_\varepsilon(x) = 0$ となる．

$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon$ であれば $f(x-y) \equiv 1$ であるから $g_\varepsilon(y)f'(x-y) = 0$ となる．

$-1-\varepsilon < x < -1+\varepsilon$ ならば $f_\varepsilon(x) = \int_{-\varepsilon}^{1+x} g_\varepsilon(y)dy$ であるから $x$ の増加関数であり $f'_\varepsilon(x) \ge 0$ となる．

**解 10.** $1^\circ, 2^\circ$ を満たし $\sum g_j(x) > 0$ となるように $g_j(x)$ をつくり $f_j(x) = g_j(x)/\sum g_k(x)$ とおけばよい．

**解 11.** $g(x) = e^{ix\cdot k}f(x)$ とおくと

$$\widehat{g}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}e^{ix\cdot k}f(x)dx = \int e^{-ix\cdot(\xi-k)}f(x)dx = \widehat{f}(\xi-k)$$

となる.

**解 12.** $g(x) = f(x-k)$ とおき $x-k=y$ とおくと

$$\widehat{g}(\xi) = \int e^{-i(y+k)\cdot\xi}f(y)dy = e^{-ik\cdot\xi}\widehat{f}(\xi)$$

となる.

**解 13.** $\widehat{g}(\xi) = \int e^{-ix\cdot\xi}f(tx)dx = \int e^{-iy\cdot(\xi/t)}f(y)|t|^{-n}dy = |t|^{-n}\widehat{f}(\xi/t)$.

**解 14.** $|e^{-ix\cdot\xi}| = 1$ であるから $|\widehat{f}(\xi)| \leq \int |e^{-ix\cdot\xi}||f(x)|dx = \int |f(x)|dx$ 右辺の積分の存在は $\mathbb{R}^1$ の場合には $|x|$ が大きいとき $|f(x)| < C/(1+|x|^2)$ といえることからしたがう.

**解 15.** $\mathcal{F}$ が線形であること（ $\mathcal{F}[af+bg] = a\mathcal{F}[f]+b\mathcal{F}[g]$ ）と，定理 1.2.2 の 2° とから直ちに得られる.

**解 16.** 定理 1.2.3 の 2° の (1.2.16) から明らかである.

**解 17.** $l \neq m$ なら 与式$=0$．なぜならば $l > m$ とすると (1.2.17) の第1式と (1.2.16) の第2式を用いると与式$=0$ がわかる.

$l = m$ のときは上の考察に (1.2.15) をあわせると得られる.

**解 18.** $(2\pi)^n\overline{\mathcal{F}}[g](\xi) = \int e^{ix\cdot\xi}g(x)dx = \int e^{-ix\cdot(-\xi)}g(x)dx = \widehat{g}(-\xi)$

**解 19.** $a(\xi) \notin \mathcal{S}$ であることをまず注意しておく．微分の拡張としての $A$ は $f \in \mathcal{S}$ に対し $Af(x) = \overline{\mathcal{F}}[a(\xi)\widehat{f}(\xi)](x)$ である．また $\sin\omega\xi = \dfrac{e^{i\omega\xi}-e^{-i\omega\xi}}{2i}$ と表されるから

$$Af(x) = \frac{1}{2i}\int(e^{i(x+\omega)\xi}-e^{i(x-\omega)\xi})\widehat{f}(\xi)d\!\!{}^-\xi = \frac{f(x+\omega)-f(x-\omega)}{2i}$$

**解 20.** $n=1$ の場合の証明の $f$ を用いて $g$ を $g(y,\eta) = \prod_{k=1}^{n} f(x_k,\xi_k)$ とし，これを用いると $n=1$ の場合と同様に証明できる.

**解 21.** $\int\left\{\int e^{-x\cdot\xi}f(x)dx\right\}\overline{\widehat{g}(\xi)}d\!\!{}^-\xi = \int f(x)\overline{\int e^{ix\cdot\xi}\widehat{g}(\xi)d\!\!{}^-\xi}dx = \int f(x)\overline{g(x)}dx$

**解 22.** $a \in \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{S}$ のとき $a(x)D_x^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ を示せばよい．そして，これは

$D_x^\alpha u(x) \in \mathcal{S}$ なることから得られる．$f \in \mathcal{M}$, $u \in \mathcal{S}$ なら $fu \in \mathcal{S}$ となることは $\mathcal{M}$ と $\mathcal{S}$ との定義から得られる．

**解 23.** 2° $\xi \in \mathbb{R}^1$ とする． $D_x\langle\xi\rangle^a = 0$ であるから $|D_\xi\langle\xi\rangle^a| \le C\langle\xi\rangle^{a-1}$ を示せばよい．$|\xi| < \langle\xi\rangle$ であるから $|\dfrac{d}{d\xi}(1+\xi^2)^{a/2}| = |\dfrac{a}{2}2\xi(1+\xi^2)^{a/2-1}| \le |a|\langle\xi\rangle^{a-1}$
3° 問 6 を参考にすればすぐに示される．
4° $|\xi| \to \infty$ のとき $\exp[|\xi|^2]$ は $\xi$ のどんな多項式より早く増大するから $\exp[|\xi|^2] \in \mathrm{S}^m$ となる $m$ は存在しない．

**解 24.** $m_1 < m_2 = m$ とすると $\langle\xi\rangle^{m_1} \le \langle\xi\rangle^m$ であるから

$$|c_1p_1 + c_2p_2| \le c_1\langle\xi\rangle^{m_1} + c_2\langle\xi\rangle^m \le (c_1+c_2)\langle\xi\rangle^m$$

となる． $x$ や $\xi$ について微分したものの評価についても同様である．

**解 25.** 略

**解 26.** 1° $\alpha = (0,0,0)$ に対応する項は 1 である．これ以外に 26 項ある．
2° ならない．$p$ はこの本で定義した擬微分作用素ではない．$|\sin\xi| \le 1$ であるが，$|\partial_\xi \sin\xi| = |\cos\xi|$ であるから，$|\xi| \to \infty$ のとき $\to 0$ とはならない．$\mathrm{S}^{-1}$ に入らない．

**解 27.** 1° $p \in \mathrm{S}^1$, $q \in \mathrm{S}^{-1}$ である．したがって (1.3.6) において $N=1$ とすると示される．
2° $r(x,\xi) = \displaystyle\sum_{|\alpha|=1} p_{(\alpha)}^{(\alpha)}(x,\xi)q_{(\alpha)}^{(\alpha)}(x,\xi)$ が求めるものの一つである．

**解 28.** $\sigma(PQ-QP) = \sigma(PQ) - pq + \bigl(pq - \sigma(QP)\bigr)$ と表せる．

**解 29.**
$$\sigma[P,Q] - \{p,q\} = \left(\sigma(PQ) - pq - \sum_{|\alpha|=1} p^{(\alpha)}q_{(\alpha)}\right) - \left(\sigma(PQ) - pq - \sum_{|\alpha|=1} q^{(\alpha)}p_{(\alpha)}\right)$$

**解 30.** 略．

**解 31.** $k$ を十分大きくとって $m_k + 1 < m_N$ となるようにすると $j \ge k$ なら $\psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi) \le C_j\langle\xi\rangle^{m_j} \le 2^{-j}\langle\xi\rangle^{m_N}$． よって $\displaystyle\sum_{j=k}^{\infty}|\psi(\varepsilon_j\xi)p_j(x,\xi)| \le \langle\xi\rangle^{m_N}\sum_{j=k}^{\infty}2^{-j}$ となる．

**解 32.** 略．

**解 33.** 略.

**解 34.** 1° $[v+x]_l \leq [v]_l + [w]_l$ を示せば, $w = u - v$ とおいて与式を得る. そして, $[\ ]_l$ の定義はこの不等式を含む.

2° $u_j - u \to 0$ (半ノルムで) は $[u - u_j - 0]_l \to 0$ である. $[-w]_l = [w]_l$ であるから 1° を用いて $|[u]_l - [v]_l| \leq [u-v]_l$ を得る. これと $[u-u_j]_l \to 0$ とから $[u_j]_l \to [u]_l$ となる.

3° 問 39 の例を見よ.

**解 35.** 1° は高木 [1] 161 頁を見よ.

2° $f(x)$ が $\mathrm{C}^\infty$ であることは 1° を繰り返し用いて得られる. $\mathcal{S}$ に入ることも同様にして示される.

3° $f \in \mathcal{S}$ であることと例 11 の解から得られる.

**解 36.** 略.

**解 37.** フレッシェ空間になることは例 11 とほぼ同様にして示される. $P$ の $\mathcal{B}$ での連続性については定理 3.4.1 を見よ.

**解 38.** 1° $f_n(x) = e^{(x-n)^2}$ とすると $f_n \in \mathcal{S}$, $f_n \to 0$ (各点収束) であるが一様収束しない.

2° $f_n(x) = e^{-(nx)^2}/n$ とすると $f_n \in \mathcal{S}$, $f_n \to 0$ (一様収束) であるが $f_n'(1/n) = -2/e$ である.

3° 半ノルム収束なら一様収束, 一様収束なら各点収束は容易.

**解 39.** $j$ が $N$ から始まるのなら $\mathrm{S}^{-N}$ での半ノルム収束となる.

**解 40.** $t > 0$ なら $e(t,\xi) \in \mathrm{S}^{-\infty}$ であるが $m < 0$ ならば $e(0,\xi) = 1 \notin \mathrm{S}^m$ であるから収束するとしても $\mathrm{S}^0$ の中である. $u(t) = e(t,\xi) - 1$ とすると $t \to 0$ のとき $|u(t)|_l^{(0)} \to 0$ となることは容易.

# 第 2 章の解答

**解 1.**　1° は定義から明らかである．2° を示す．$f \in \mathcal{E}'$ のとき $f \in \mathcal{S}'$ となることを示す．$u \in \mathcal{S}$ とすれば 1° から $u \in \mathcal{E}$ である．ゆえに $\langle f, u\rangle$ が定義できる．したがって $f \in \mathcal{S}'$ である．$f \in \mathcal{D}'$ も同様に示される．

3° の証明．$T \in \mathcal{E}'$ の台が有界でないと仮定する．$\{x_n\} \subset \operatorname{supp} T$, $|x_n| \to \infty$ となる $\{x_n\}$ が存在する．これに対し $\mathrm{U}_a(x_n) \supset \operatorname{supp}\varphi_n$, $T(\varphi_n) \neq 0$ となる $\varphi_n \in \mathcal{E}$ が存在する．$\psi_n = \varphi/T(\varphi_n)$ とする．$|x_n| \to \infty$ かつ $\mathrm{U}_a \supset \operatorname{supp}\psi_n$ となるから $\psi_n \to 0$ が成り立ち $T(\psi_n) \to 0$ となる．これは $T(\psi_n) = 1$ と矛盾する．シュワルツ［1］80 頁を見よ．

**解 2.**　${}^\forall\varphi \in \mathcal{D}$ に対し $\langle g_\varepsilon, \varphi\rangle = \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx \to \varphi(0)$　であり，また $\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0)$（定義）である．

**解 3.**　1°　$\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sqrt{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx = 0$

2°　$\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx$　であるが　$\displaystyle\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon \varphi(x)dx \to \varphi(0)$ であるから $\varphi(0) \neq 0$ であれば発散する．

**解 4.**　任意の $\varphi \in \mathcal{D}$ に対し $\langle \exp[x^2], \varphi\rangle$ が定義できるから $\exp[x^2] \in \mathcal{D}'$ となる．

$\exp[-\sqrt{1+x^2}/2] \in \mathcal{S}$ であるが $\displaystyle\int_2^\infty \exp[x - \sqrt{1+x^2}/2]dx$ は発散する．

**解 5.**　$\varphi \in \mathcal{S}$ のとき　$\displaystyle\int_1^\infty \varphi(x)\log x dx$　が収束することは明らか．$|\varphi(x)| < c$ であるから　$c\displaystyle\int_0^1 |\log x|dx$　も収束する．

**解 6.**　任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ に対し $\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}dx$　が収束することを示せばよい．$\varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\theta x)$ とかけ $|\varphi'| < c$ であるから収束する．

**解 7.**　$\displaystyle\int f(x-h)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(x+h)dx = \langle f, T(-h)\varphi\rangle$

**解 8.**　定数，$\sin x$，$\sum T(n)\delta$ 等々．

**解 9.**　$f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$ とする．$f(x-h) = f(x)$ であれば

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h) - f(x)}{h} = -f'(x) \equiv 0.$$

よって $f(x)$ は定数である．

**解 10.** $y = ax$ とおくと $dx = a^{-n}dy$ であるから

$$\langle T(A)f, \varphi\rangle = \int f(ax)\varphi(x)dx = a^{-n}\int f(x)\varphi\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

となる．

**解 11.** $\langle T(A)\delta, \varphi\rangle = a^{-n}\langle \delta, T(A^{-1})\varphi\rangle = a^{-n}\varphi(0)$ であるから $T(A)\delta = a^{-n}\delta$ となる．$A$ が回転を与えるときは $|\det A| = 1$ である．したがって

$$\langle T(A)\delta, \varphi\rangle = |\det A|^{-1}\langle \delta, T(A^{-1})\varphi\rangle.$$

ゆえに $T(A)\delta = \delta$ となり，球対称になる．

**解 12.** $n = 1$ のときに不成立である．$f(x) = x$ は奇関数であるが球対称である．

**解 13.** $\langle \delta', \varphi\rangle = -\langle \delta, \varphi'\rangle = -\varphi'(0)$

**解 14.** 超関数の微分は双対関係から無限回微分可能関数の微分となるから何回でも微分できる．

**解 15.** 1° $\langle f_\varepsilon, \varphi\rangle = \dfrac{\varphi(0)}{\pi}\displaystyle\int \frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx + \frac{\varepsilon}{\pi}\int \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2}dx$ であるから第 1 項 $= \varphi(0)$，第 2 項 $\to 0$

2° $\operatorname{sgn} x = Y(x) - Y(-x)$ であり $Y' = \delta$ である．

**解 16.** 1° $\dfrac{d}{dx}\log|x| = \operatorname{vp}\dfrac{1}{x}$ である．

2° $\langle \dfrac{d}{dx}\operatorname{vp}\dfrac{1}{x}, \varphi\rangle = -\displaystyle\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\varepsilon}\frac{\varphi'(x)}{x}dx$ となるが，$\varphi' \in \mathcal{S}$ であるからこれは収束する．問 6 を見よ．

**解 17.** 1° $\overline{\mathcal{F}}[\overline{\psi}](x) = \overline{g}(x)$ であるから $\overline{g}(x) = \displaystyle\int e^{ix\xi}\overline{\psi(\xi)}d\xi$ となる．よって

$$g(x) = \int e^{-ix\xi}\psi(\xi)d\xi = \int e^{i(-x)\xi}\psi(\xi)d\xi = \overline{\mathcal{F}}[\psi]^\vee$$

となる．

2° $\psi = \overline{\overline{g}}$ とおくと上の結果から

$$\langle \widehat{f}, \psi\rangle = (2\pi)^n\langle f, g\rangle = (2\pi)^n\langle f, \overline{\mathcal{F}}[\psi]^\vee\rangle$$

**解 18.** $(\widehat{\delta}_a, \widehat{\varphi})_\xi = (\delta_a, \varphi)_x = \overline{\varphi(a)} = \displaystyle\int e^{ia\xi}\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}d\xi = (e^{ia\xi}, \widehat{\varphi})_\xi$

**解 19.** $a = 0$ ならば $I = 0$ は自明．$a > 0$ とする．$y = ax$ とおくと

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin y}{y/a}dy/a = \pi$$

$a<0$ のとき $I=-\pi$ も同様にして示される. $\displaystyle\int \frac{\sin y}{y}dy=\pi$ については高木 [1] 223 頁を見よ.

**解 20.** $\overline{\overline{\widehat{\varphi}}}=\widehat{\varphi}^{\vee}$ と $(\operatorname{sgn} x, f(x))=(-\operatorname{sgn} x, f(-x))$ とから証明される.

**解 21.** $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^1_x)$ とすると $xf\in\mathcal{S}'$ は $(xf,\varphi)=(f,x\varphi)$, $\varphi\in\mathcal{S}$ で定義される. しかし, $g\in\mathcal{S}'$ のとき $\frac{1}{x}g$ を $\left(\frac{1}{x},\varphi\right)=\left(g,\frac{1}{x}\varphi\right)$ で定義することはできない. なぜならば $\varphi\in\mathcal{S}$ であっても $\frac{1}{x}\varphi\in\mathcal{S}$ とはいえないからである. $xf=1\in\mathcal{S}'$ となる $f\in\mathcal{S}'$ が存在して, この $f$ と $\mathcal{S}'$ の超関数との積が定義できるのなら $x$ で割るということを $f$ を掛けるということで定義できるように思えるが, $x\delta=0$ となり超関数として $x$ で割ることはうまく定義できない.

**解 22.** 1° $\mathcal{F}[1]=2\pi\delta(\xi)$ と $\mathcal{F}[x^m f(x)]=\left(i\dfrac{d}{d\xi}\right)^m\mathcal{F}[f](\xi)$ とから $\mathcal{F}[x^m]$ $=2\pi i^m\delta^{(m)}(\xi)$ となる.

2° $x_+^m=x^mY(x)$ と表し, 例 9 と上の 1° とを用いると

$$\mathcal{F}[x_+^m]=\pi i^m\delta^{(m)}-i\left(i\frac{d}{d\xi}\right)^m\operatorname{vp}\frac{1}{\xi}$$

となる. $\operatorname{vp}\dfrac{1}{\xi}$ の微分については問 6 の 2° を見よ.

3° $|x|^m\operatorname{sgn} x=-x^mY(-x)+x^mY(x)$ と表し上の結果を用いる.

4° $-2\pi ie^{-\tau|\xi|}Y(\xi)$ となる (熊ノ郷 [1] p.41 ).

**解 23.** 1° $\operatorname{sing\,supp} f=\{(x,y);\ x=0\}$, 2° $\operatorname{sing\,supp} f=\{(x,y);\ x=y\}$

**解 24.** 1° $\operatorname{sing\,supp} f=\{(x,y);x=0\}$ である.

$(\widehat{f},\widehat{\varphi})=(f,\varphi)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_0^{\infty}\varphi(x,y)dx$ より $\widehat{f}(\xi,\eta)=2\pi\delta(\eta)\left\{\pi\delta(\xi)-i\operatorname{vp}\dfrac{1}{\xi}\right\}$.

2° $\operatorname{sing\,supp} f=\{(x,y);x=y\}$ . $|x|=-x+2x_+$ のフーリエ変換は問 22 の 1°,2° .

**解 25.** 1° テーラーの定理によって

$$p(x+y,\xi+\eta)=\sum_{|\alpha|<N,|\beta|<N}\frac{1}{\alpha!\beta!}(-iy)^\beta\eta^\alpha p^{(\alpha)}_{(\beta)}(x,\xi)+R_N$$

と表されるが $\alpha\neq\beta$ ならば第 1 章問 17 の結果を用い, $|\alpha|>m$ なら $p(x,\xi)$ が $\xi$ について多項式であることから

$$\text{Os-}\iint e^{iy\cdot\eta}\overline{p(x+y,\xi+\eta)}dy\,đ\eta=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{1}{\alpha!\alpha!}\overline{(-iy)^\alpha\eta^\alpha p^{(\alpha)}_{(\alpha)}(x,\xi)}$$
$$=\sum_{|\alpha|\le m}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\overline{p_\alpha(x,\xi)}$$

を得る．

$2^\circ$ $|\alpha| \neq 0$ なら $p_\alpha = 0$ であり $p$ は実数値であるから $p^* = p$ である．

**解 26.** この問は第 2.5 節で扱われるべきものである．$\varphi \in \mathcal{D}$ とする．$\widehat{u}$ は多項式程度の増大の関数（ペイリーウイナーシュワルツの定理）であり $p(x,\xi)$ は$\xi$ については $|\xi|$ のどの負べきより速く減少するから$\xi^\alpha p(x,\xi)\widehat{u}$ は $\xi$ についてはどの負べきより速く減少する．したがって $\int e^{ix\cdot\xi}\xi^\alpha p(x,\xi)\widehat{u}(\xi)d\xi$ は任意の $\alpha$ に対し関数となる．これは $Pu \in \mathcal{E}$ を示している．あとは例 12 から従う．(リーマンルベーグの定理)

**解 27.** 両辺をフーリエ変換すると $(|\xi|^2+1)\widehat{u} = 1$ となる． $n=1$ とすると $\dfrac{1}{1+\xi^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\xi - i} - \dfrac{1}{\xi+1}\right)$ となるから $u = \dfrac{1}{2}\left(e^{-x}Y(x) + e^xY(-x)\right) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$ となる．

**解 28.** 略

**解 29.** 被積分関数は $r$ について急減少であるから積分は収束する．

$$\int_0^{2\pi} d\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\int_\varepsilon^\infty \frac{\log r}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi dr$$

と表せて $\varphi$ は $\theta$ について周期 $2\pi$ の周期関数であるからこれは零になる．

**解 30.** 問 34 の解答を見よ．

**解 31.** $E(t,0)$ は $LE=0$, $E(t,t)=I$ を満たすから (2.4.6) の $u(t,x)$ が初期値問題 (2.4.3) の解であることは本文で述べた通りである．

$u(0,x) = u_0(x)$ は成り立っているから $L$ と積分との順序が可換であればよい．

**解 32.** 積のフーリエ変換はフーリエ変換のたたみ込みであることを用いると

$$\int e^{ix\cdot\xi}e(t,\tau,\xi)\widehat{f}(\tau,\xi)d\xi = \widehat{e}(t,\tau,\cdot) *_x f(\tau,\cdot).$$

よって

$$\begin{aligned} u &= \int_0^t U(t,\tau,\cdot) *_x f(\tau,\cdot)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^\infty Y(t-\tau)U(t,\tau,\cdot) *_x f(\tau,\cdot)d\tau = K * f \end{aligned}$$

**解 33.** 略．

**解 34.** $u = K_0 * f$ とおくと

$$P_0u = PK_0 * f = (PK_0) * f = \delta * f = f$$

となるわけであるが $K_0 * f$ が $P_0u = f$ の解を与えることは直接的にも示される．

$$u(x) = K_0 * f = -\int_{-\infty}^{x} (x-y)f(y)dy$$

となるから $u' = -\displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(y)dy,\ u'' = -f(y)$ となり $-u'' = f(y)$ を得る.

**解 35.** 例 10 $\mathcal{F}\left[\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x}\right]$ を用いると例 15 と同様にして $\mathrm{vp}\,\dfrac{1}{x} \in H_{-1/2}$ がいえる.

**解 36.** 略.

**解 37.** 問 26 を見よ. 問 36 の結果とこの結果を用いると $\mathrm{S}^{-\infty} \ni P : H_{-\infty} \to H_{\infty}$ から $P : \mathcal{E}' \to H_{\infty} \subset \dot{\mathcal{B}}$ がいえるわけでこれから問 26 が示される.

# 第 3 章の解答

**解 1.** $(a, b, h) \neq (0, 0, 0)$ とする.

1° $h^2 - ab < 0$ かつ $a(f^2 + be^2 - 2hef + g(ab - h^2)) > 0$

2° $h^2 - ba > 0$ かつ $a(f^2 + be^2 - 2hef + g(ab - h^2)) \neq 0$

3° $h^2 - ab = 0$ かつ $\sqrt{|a|}f \neq \sqrt{|b|}e$

注. $e = f = 0$ のとき, 1° は $h^2 - ab < 0$, $ag < 0$ となる. 2° は $h^2 - ab > 0$, $g \neq 0$ となる.

**解 2.** 略.

**解 3.** $u_1$ と $u_2$ とが共に (3.1.3) の解であるとすると, $u = u_1 - u_2$ とおけば (3.1.4) を満たすから $u_1 = u_2$ となる.

**解 4.** $f(x)$ は奇関数であり周期が $2l$ であるから $y = f(x)/2$ のグラフは簡単に描ける. パラメータ $t$ が増加すると, $y = f(x + ct)/2$ のグラフと $y = f(x - ct)/2$ のグラフは上のグラフを $0.1l$ の速さでそれぞれ左と右に進んで行く. $y = u(t, x)$ のグラフはこの二つを加えたものとなる.

**解 5.** $R_0 = R - |x_0 - c|$ とおく. $|x - x_0| < R_0$ ならば

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + K_n$$

と表される. $K_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(\theta)(x - x_0)^n$, $|f^{(n)}(\theta)| < n!MR^{-n}$ であるから $n \to \infty$ のとき $|K_n| < \dfrac{|x - x_0|^n}{R} \to 0$ となる.

**解 6.** 2° $\left(\partial_r^2 + \dfrac{1}{r}\partial_r + \dfrac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}\right) v(\theta)w(r) = 0$ より

$$\frac{1}{r^2} v'' w + v\left(w'' + \frac{1}{r} w'\right) = 0$$

となる. 両辺を $vw$ で割ると

$$\frac{v''}{v} = -\frac{r^2(w'' + \frac{1}{r}w')}{w}$$

となる. 左辺は $\theta$ のみの関数, 右辺は $r$ のみの関数であるから, 共に定数となる. それを $k$ とおくと与式を得る.

**解 7.**

$$2(al+bm+cn+l^2+m^2+n^2)=(a+l)^2+(b+m)^2+(c+n)^2 \geq 0$$

最後の等号は $(a,b,c)=-(l,m,n)$ のときのみ成り立つ．ゆえにこのとき $al+bm+cn$ は最小値 $-(l^2+m^2+n^2)$ となる．

**解 8.** $S$ 上の $(x_0,y_0,z_0)$ における $S$ の法線は

$$x=x_0+n_1t,\ y=y_0+n_2t,\ z=z_0+n_3t$$

と表される．したがって法線上では温度 $w$ は $w(t)=u(x_0+n_1t,y_0+n_2t,z_0+n_3t)$ と表される． $w(0)=c$ である．

$$\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}$$

となるから，法線に沿った $w$ の変化率が法線微係数となっていることがわかる．

**解 9.** 略．

**解 10.** 1° $\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}$ と表されるとすると

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{a}e^{-(cn/a)^2t}$$ となる．

2° $\varphi(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\frac{n\pi x}{a}$ と表されるとすると

$$u(t,x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{a}e^{-(cn/a)^2t}$$ となる．

**解 11.** 略．

**解 12.** $\sigma(L)=i\xi_0+a_1\xi^2+a_2\xi_2^2+a_3\xi_3^2-i(b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3)-c$

**解 13.** $E(0,0)=I$ であるから

$$u(0,x)=E(0,0)u_0(x)+\int_0^0E(0,\tau)f(0,x)d\tau=u_0(x)$$

$LE(t,\tau)=0$ であるから

$$Lu=LE(t,0)u_0(x)+\int_0^tLE(t,\tau)f(\tau,x)d\tau+E(t,t)f(t,x)=f(t,x)$$

となる．ここに $LE$ は作用素としての積である．

**解 14.** 一般に行列 $A_n$ が $A$ に収束するとは各成分が収束するということである．$A(\tau)$ の $(h,k)$ 成分を $a_{hk}(\tau)$ とする．区間 $[s,t]$ において $|a_{hk}|<a$ が成り立つものとする．

$$I_j=\int_s^tds_1\int_s^{s_1}ds_2\cdots\int_s^{s_{j-1}}A(s_1)A(s_2)\cdots A(s_{j-1})ds_j$$

の $(h,k)$ 成分を $a_{hk}^{(j)}(t)$ とする．$|a_{hk}^{(j)}(t)| < \dfrac{a^j}{j!}$ が成り立ち $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a^j}{j!} = e^a$ と収束するからこの無限和は収束する．項別微分可能であること $\dfrac{d}{dt} I_j = A(t) I_{j-1}$ であることから $\dfrac{dX}{dt} = A(t)X$ を得る．

**解 15.** $\displaystyle\int_0^t \cdots \int_0^{s_{j-1}} p(s_1)\cdots p(s_j)ds_j = \frac{1}{j!}\left\{\int_0^t p(\tau)d\tau\right\}^j$ であるから

$$e_0 = 1 + \sum \frac{(-1)^j}{j!}\left\{\int_0^t p(\tau)d\tau\right\}^j = \exp\left[-\int_0^t p(\tau)d\tau\right]$$

となる．

**解 16.** 問 14 と同様である．

**解 17.** $p(t,x,\xi) = a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_3^2 + i(b_1\xi_1 + b_2\xi_2 + b_3\xi_3) + c$ である．$\delta = \delta' + \delta''$ とする．定数 $b$ を $|b_j| < b$ となるものとすると $|p| \geq \delta'|\xi|^2 + \delta''|\xi|^2 - b|\xi| - c$ が成立する．$C$ を $C > \left(\dfrac{b}{2\delta''}\right)^2 + |c|$ を満たすように選べば

$$|p| \geq \delta'|\xi|^2 + \delta''\left(|\xi| - \frac{b}{2\delta''}\right)^2 - \frac{b^2}{4\delta''} - |c| > \delta'|\xi|^2 - C$$

となる．

**解 18.** $p = p_1 \cdots p_j$, $m = m_1 + \cdots + m_j$, $Q = P_{j+1}$ と表しておくと $p^{(\gamma)} = p^{(\gamma)} - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}[p]_k^{(\gamma)} + \sum_{k=0}^{N-1}[p]_k^{(\gamma)}$ そして $p^{(\gamma)} - \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}[p]_k^{(\gamma)} \in \mathrm{S}^{m-N}$ （$j$ についての帰納法の仮定）と $\sigma(PQ) - \displaystyle\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{|\gamma|=l}\frac{1}{\gamma!}p^{(\gamma)}q_{(\gamma)} \in \mathrm{S}^{m+m_{j+1}-N}$ （定理 1.3.2）から任意の $j$ に対し与式を得る．

**解 19.** 略．

**解 20.** 略．

**解 21.** $\sum a_n(x)$ が収束すること，$a_n(x)$ は $\mathrm{C}^1$ であること，$\sum a_n'(x)$ が一様収束することの三つが成り立てば $\sum a_n(x)$ も $\mathrm{C}^1$ となり

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(x)$$

が成り立つ．

$e_0$ の右連続性，右可微分性はこの十分条件を確かめればよい．

**解 22.** 問 16 の正当化をするわけである. $e_0$ の定義は (3.3.8) である. 問 21 によって $s \leq t$ のとき $t$ について項別微分可能となり問 16 によって (3.3.9) を満たすことがわかる.

**解 23.** 問 17 によって

$$\mathrm{Re}\int_s^t p(\tau)d\tau \geq (t-s)(\delta'|\xi|^2 - C)$$

が成り立つから

$$\left|\exp[-\int_s^t p(\tau)d\tau]\right| = \exp[-\mathrm{Re}\int_s^t p(\tau)d\tau] \leq C\exp[-\delta'(t-s)|\xi|^2]$$

を得る.

**解 24.** 上の問 23 と第 1 章問 23 の 3° とから得られる.

**解 25.** 形式的には問 13 である. $E$ の性質が明らかになっているから真に解であることがわかる.

**解 26.** 2° 一意でないことは例 3 が示している. $|u| < \exp[c|x|^2]$ のときに一意であることについては Friedman, A. [1] を見よ.
1° 評価が成り立つのならば 2° によって $g \equiv 0$ となる. 3° $E_0(t,0)u_0(x)$ が定義できて解となることは問 23 . 一意性が成立している範囲では解はこれ以外には存在しない.

**解 27.** $t > 0$ とする. $z = (x-y)/\sqrt{4c^2t}$ とおく.

$$u(t,x) = \frac{M}{\sqrt{\pi}}\int_{(x-b)/\sqrt{4c^2t}}^{(x-a)/\sqrt{4c^2t}} e^{-z^2}dz$$

となる. $\mathrm{erf}\, z$ の定義から $0 < x-b < x-a$ または $x-b < x-a < 0$ のときは $u \to 0$ となる.

$x-b < 0 < x-a$ のときは $\int e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$ であるから $u \to M$ となる.

$$u_t - c^2u_{xx} = 0$$

を満たすことは (3.5.6) の式を微分すればわかる.

**解 28.** $e(t,s) = \exp[-c^2\xi^2t]$ である.

$$u(t,x) = \int e^{ix\xi}e^{-c^2\xi^2t}\widehat{u}_0(\xi)d\xi$$

において $\overline{\mathcal{F}}[\widehat{f}\widehat{g}] = f * g$ と

$$\overline{\mathcal{F}}[e^{-c^2\xi^2t}] = \overline{\mathcal{F}}[e^{-(\sqrt{2c^2t}\xi)^2/2}] = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}e^{-(x/\sqrt{2c^2t})^2/2}$$

を用いると

$$u(t,x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int e^{-(x-y)^2/(xc^2t)} u_0(y)dy = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_a^b e^{-(x-y)^2/(xc^2t)} dy.$$

**解 29.** 複素解析関数の一致の定理を用いる． $x$ のある区間で定数なら全空間で定数になる．

**解 30.** 漸近展開は

$$e^{-(1+x^2)\xi^2(t-s)}\left(1 + 2x(1+x^2)\xi^3(t-s)^3 + \cdots\right)$$

となる．

# あとがき

多くの理論がそうであるように，擬微分作用素の理論も自己充足的 (self-contained) ではない．多くの関連する理論に支えられて成り立っている．また，現在も発展しつつあるし，応用分野も広がりつつある．したがって，本書も自己充足的であることを意図しなかった．納得のできないところは参考文献のどれかで学ばれることをお願いする．

擬微分作用素の理論をさらに学ぶのであれば，Kumano-go ［1］を勧める．そして，この本の巻末の文献表の中から，関心のある分野の論文を見つけることができれば，それを読んでみるのもよいと思う．しかし，この本の出版後にも多くの論文が発表されている．応用数学の分野でも擬微分作用素の理論が用いられているが，浅学な著者にはその一端を紹介することもできない．

予備知識，中でもルベーグ積分，超関数，フーリエ変換は重要である．しかし，予備知識をしっかりしたものにすることも大切であるが，擬微分作用素の理論を発展させ応用することを著者としては強く望みたい気持ちである．コシリャコフ他［1］などに述べられていることを，擬微分作用素を通じて見ることが有益ではなかろうか．

偏微分方程式の理論の中で，線形の方程式は重要ではあるが一部分にすぎない．小著はその中でも放物型の初期値問題というごく限られた問題のみについて，擬微分作用素を用いる解法を述べたにすぎない．これ以外の多くの問題にとっても擬微分作用素の理論は有効である．擬微分作用素を研究していない人々にも近づきやすい書物がさらに出版されることが必要であると思う．

# 参考文献


Calderón, A.P. [1] Uniqueness in the Cauchy problem of partial differental equation, Amer. J. Math., 80(1958), 16-36.

Friedman, A. [1] *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, ING. 1964.

Gel'fand, I.M. and Shilov, G.E. [1] *Generalized Functions*, (Moscow, 1958).

ゲリファント = シーロフ [2] 超関数入門 I, II 共立出版 1963.

Hörmander, L. [1] *Linear Partial Differential Operators*, Spinger-Verlag, 1963.

伊藤清三 [1] ルベーグ積分入門 裳華房 1963.

垣田高夫 [1] シュワルツ超関数入門 日本評論社 1985.

コシリャコフ他 [1] 物理·工学における偏微分方程式 上下 岩波書店 1974.

熊ノ郷準 [1] 擬微分作用素 岩波書店 1974.

熊ノ郷準 [2] 偏微分方程式 共立出版 1978.

Kumano-go, H. [3] *Pseudo-differential operators*, MIT Press, 1981.

熊ノ郷準 [4] 擬微分作用素及び Fourier 積分作用素の理論と双曲型方程式の基本解 大阪大学 1983.

溝畑茂 [1] 偏微分方程式論 岩波書店 1965.

溝畑茂 [2] ルベーグ積分 岩波書店 1966.

長瀬道弘 [1] 微分方程式 裳華房 1993.

Pucci, C. [1] *Some topics in parabolic and elliptic equations*, Univ. of Maryland Lecture Series 36, 1958.

シュワルツ, L. [1] 物理数学の方法 岩波書店 1966.

シュワルツ, L. [2] 超函数の理論 岩波書店 1971.

Shinkai, K. [1] The symbol calculus for the fundamental solution of a degenerate parabolic system with applications, Osaka J. Math., 14(1977), 55-84.

高木貞治 [1] 解析概論 岩波書店 1938.

Taylor, M.E. [1] *Pseudodifferential Operators*, Princeton Univ. Press, 1981.

Treves, F. [1] *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators* I,II, Plenum Press, 1980.

Tsutsumi, C. [1] The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator, Proc. Japan Acad., 50(1974), 11-15.

# 索　　引

ルベーグ積分に関する項目はすべて省略した．99 頁から 104 頁に集中して述べられている．

## 関数空間，超関数の空間，シンボルの空間，その他の集合の記号

## いろいろの記号

## アイウエオ順索引

## サ行



## タ行

## ナ行



## ハ行

## マ行



## ヤ行



## ラ行

**著者略歴**

1960年３月　大阪大学大学院理学研究科修士課程修了

現在　大阪府立大学総合科学部教授，理学博士

**擬微分作用素** — 偏微分方程式解法への応用 —

1994 年 6 月 1 日　　第 1 版発行©

| | | |
|---|---|---|
| 検印省略 | 著作者 | 新開謙三（しんかいけんぞう） |
| | 発行者 | 吉野達治 |
| | 発行所 | 東京都千代田区四番町８番地<br>電話東京 3262-9166～9<br>株式会社 裳華房 |
| 定価はカバーに表示してあります. | 印刷所 | 三美印刷株式会社 |
| | 製本所 | 板倉製本印刷株式会社 |

社団法人
自然科学書協会会員



ISBN4-7853-1083-9

Printed in Japan